

VIBRAÇÃO LONGITUDINAL DE BARRAS
DE SECÇÃO VARIÁVEL

NELSON BACK

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS PÓS-GRADUADOS DE ENGENHARIA DA UNIVERSI-
DADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS RE-
QUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DE GRAU DE
MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:

Luis Burlon
Lydney Lanch
Diomedes Pereira

Março de 1968

AGRADECIMENTOS

Ao professor Luiz Beviláqua pela sua dedicada orientação. À Escola de Engenharia Industrial da Universidade Federal de Santa Catarina, à Coordenação do Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior(CAPES), ao Banco Nacional do Desenvolvimento Econômico (BNDE), pela oportunidade de realizar este trabalho. Aos Professores do Programa de Engenharia Mecânica da Coordenação dos Programas Pós-Graduados de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro(COPPE-UFRJ).

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS.....	II.
ÍNDICE.....	III.
SUMÁRIO.....	IV.

Capítulos:

I. VIBRAÇÕES LONGITUDINAIS DE BARRAS UNIFORMES.....	1.
1-1. Instituição da equação diferencial de movimento os cilatório longitudinal.....	1.
1-2. Vibração longitudinal da barra uniforme com uma ex tremidade engastada e a outra livre.....	5.
1-3. Vibração longitudinal da barra com duas extremida des livres.....	8.
1-4. Vibração longitudinal da barra com duas extremida des engastadas.....	10.
1-5. Vibração longitudinal de molas helicoidais cilín dricas.....	12.
1-6. Vibração longitudinal da barra com uma extremidade engastada e na outra uma mola.....	13.
1-7. Vibração longitudinal da barra com uma extremidade engastada e na outra uma massa.....	17.
1-8. Vibração longitudinal da barra com massa nas duas extremidades.....	21.
II. VIBRAÇÃO LONGITUDINAL DE BARRAS DE SECÇÃO VARIÁVEL.....	33.

2-1. Barra com secção variando segundo a função $f(x) = c^2 e^{-2 k x}$	33.
2-2. Barra com secção variando segundo a função $f(x) = c^2 x^{-2 n}$	39.
2-3. Barra com secção variando segundo a função $f(x) = S_0 (1 - kx)^2$	43.
2-4. Barra tronco-cônica com massa numa extremidade....	49.
2-5. Barra tronco-cônica com mola numa extremidade.....	51.

III. VIBRAÇÃO LONGITUDINAL DE BARRAS COM SECÇÃO VARIÁVEL (SÉRIE DE FOURIER)	56.
3-1. Instituição do sistema de equações.....	56.
3-2. Exemplo. Barra variável com uma extremidade engastada e a outra livre.....	64.
PROGRAMA 1.....	72.
PROGRAMA 2.....	75.
PROGRAMA 3.....	80.
PROGRAMA 4.....	84.
PROGRAMA 5.....	85.
NOMENCLATURA.....	86.
REFERÊNCIAS.....	88.

SUMÁRIO

O objetivo dêste trabalho resume-se na determinação das frequências e dos modos naturais de vibração de barras com secção variável.

A primeira parte, que é um estudo prolongado em barras de secção uniforme sob diferentes condições de contorno, tem por finalidade uma base de comparação dos resultados obtidos posteriormente.

Na segunda parte são estudadas determinadas formas particulares de variação da secção para as quais é possível obter uma solução analítica de forma convencional. Poucos são êstes casos que consideramos de interêsse prático.

Finalmente obtém-se uma solução para um caso geral uma vez que a função de secção da barra admite um desenvolvimento em série de Fourier. Êste método de análise apresenta a grande vantagem de nos permitir o cálculo das frequências e dos modos naturais de vibração para as mais diversas condições de contorno, desde que instituimos a correspondente energia cinética e potencial total. É possível constatar a rápida convergência do método além da grande precisão dos resultados obtidos no exemplo, principalmente quando analisamos o valor encontrado no caso limite da barra uniforme.

CAPÍTULO I

VIBRAÇÕES LONGITUDINAIS DE BARRAS UNIFORMES

1-1. Instituição da equação diferencial de movimento oscilatório longitudinal.

Para instituírmos a equação diferencial de movimento oscilatório longitudinal de barras, consideramos uma barra de seção qualquer, como mostra a figura 1-1, podendo, posteriormente, este estudo ser aproveitado no capítulo II.

No raciocínio a seguir, considera-se as seguintes hipóteses simplificadoras:

1-1-1. Uma seção genérica da barra, quando sofre um deslocamento longitudinal, permanece plana.

1-1-2. O deslocamento lateral das partículas, devido à contração ou dilatação da barra, não influi no deslocamento longitudinal.

1-1-3. A dimensão longitudinal da barra é grande em relação à dimensão transversal e a amplitude de oscilação é pequena.

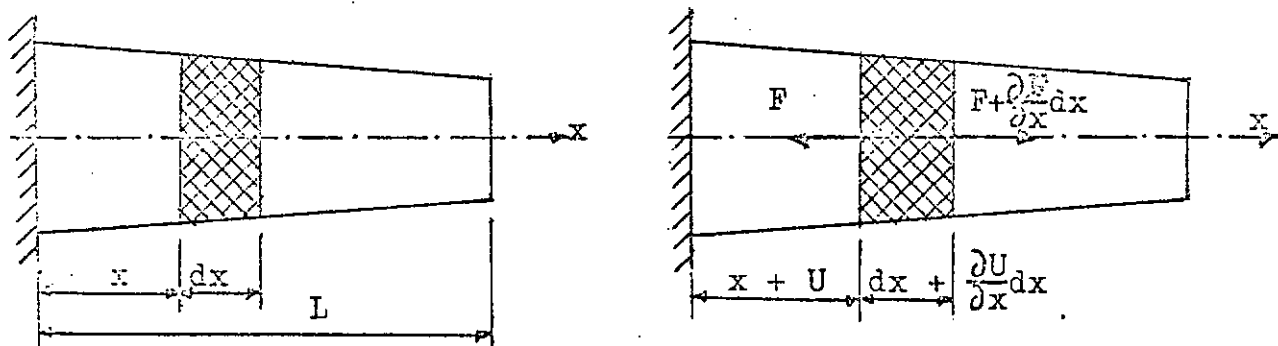


fig. 1-1

Na figura 1-1 tem-se:

$U = U(x, t)$ = deslocamento de uma secção genérica da barra em movimento oscilatório longitudinal;

E = módulo de elasticidade do material;

L = comprimento da barra;

$f(x)$ = a função da área transversal genérica;

$g(x)$ = a função da massa por unidade de comprimento;

$F(x, t) = F$ = a força que atua numa secção genérica.

Para instituir a equação diferencial, tomamos por base o princípio de Hamilton que nos diz que a variação de energia num sistema conservativo é nula, sendo expresso pela seguinte relação:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_c - E_p) dt = 0 \quad 1-1-1$$

Nesta relação, E_c é a energia cinética do sistema e E_p a energia potencial num determinado instante, podendo ser expressas pelas seguintes equações:

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^L g(x) \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 dx \quad 1-1-2$$

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^L E f(x) \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dx \quad 1-1-3$$

Introduzindo estes valores na equação 1-1-1 e operan

do, obtém-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L g(x) \frac{\partial U}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) dx - \int_0^L E f(x) \frac{\partial U}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) dx \right] dt = 0 \quad 1-1-4$$

Sabendo que os operadores de diferença e variação são intercambiáveis, x e t variáveis independentes, podemos transformar a primeira parcela da equação 1-1-4 na seguinte:

$$\int_{t_1}^{t_2} g(x) \frac{\partial U}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} g(x) \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (\delta U) dt$$

Integrando por partes o segundo membro da última igualdade, obtemos:

$$\int_{t_1}^{t_2} g(x) \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (\delta U) dt = \left[g(x) \frac{\partial U}{\partial t} \delta U \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} g(x) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \delta U dt$$

Uma vez que $\delta U = 0$ para $t = t_1$ e $t = t_2$, tem-se, finalmente:

$$\int_{t_1}^{t_2} g(x) \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (\delta U) dt = - \int_{t_1}^{t_2} g(x) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \delta U dt \quad 1-1-5$$

A segunda parcela de 1-1-4, por razões e operações semelhantes pode ser escrita da forma:

$$\int_0^L E f(x) \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta U) dx = \left[E f(x) \frac{\partial U}{\partial x} \delta U \right]_0^L - \int_0^L E \frac{\partial}{\partial x} \left(f(x) \frac{\partial U}{\partial x} \right) \delta U dx \quad 1-1-6$$

Substituindo os valores de 1-1-5 e 1-1-6 em 1-1-4, obtém-se a equação seguinte:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(E f(x) \frac{\partial U}{\partial x} \right) - g(x) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right] \delta U dx - \left[E f(x) \frac{\partial U}{\partial x} \delta U \right]_0^L \right\} dt = 0 \quad 1-1-7$$

Para prosseguir, faremos uma análise da equação 1-1-7.

Se tivermos uma extremidade da barra engastada, tem-se nesta que $\delta U = 0$ e quando a extremidade for livre, a derivada de U em relação a x é nula, por ser esta isenta de tensões.

Como na maioria das aplicações, em cada extremidade o corre um ou outro caso, a equação 1-1-7 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(E f(x) \frac{\partial U}{\partial x} \right) - g(x) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right] \delta U \, dx \, dt = 0 \quad 1-1-8$$

Na equação 1-1-8, sendo δU , dx e dt arbitrários, para que a relação seja válida é necessário que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(f(x) E \frac{\partial U}{\partial x} \right) - g(x) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad 1-1-9$$

Esta equação é a equação diferencial do movimento oscilatório longitudinal de barras com secção transversal dada pela função $f(x)$.

Para o caso em que a secção da barra é uniforme, as funções $f(x)$ e $g(x)$ tornam-se constantes, ou seja $f(x) = S$ e $g(x) = m$ em que S é a secção transversal, $m = M/L$ sendo M a massa total.

Substituindo estes valores na equação 1-1-9, obtém-se a equação 1-1-10 que é a do tipo chamada equação de onda, onde $a^2 = E S/m$.

$$a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad 1-1-10$$

A seguir apresentaremos diversos casos particulares, sendo os três primeiros de grande interesse para comparar os resultados a serem obtidos nos casos seguintes dos capítulos I e II.

1-2. Vibração longitudinal da barra uniforme com uma extremidade engastada e a outra livre.

Este caso está mostrado na figura 1-2, onde para $x=0$, a secção é fixa e para $x = L$ é livre.

Esta situação nos dá as seguintes condições de contorno:

$$U(0,t) = 0 \quad U_x(L,t) = 0$$

O estudo das vibrações livres de sistemas conservativos resume-se em determinar as frequências e os modos naturais de vibração correspondentes.

Para isto é necessário obtermos a solução da equação 1-1-10. Esta equação admite a solução por separação de variáveis supondo que:

$$U(x,t) = X T \quad 1-2-1$$

Em 1-2-1, X é somente função da coordenada x e T função do tempo t . Substituindo em 1-1-10, obtém-se a seguinte igualdade:

$$\frac{e^2}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad 1-2-2$$

Como verificamos, cada membro de 1-2-2 é função de uma só variável, logo, para que a igualdade persista em qualquer tempo, os dois membros devem ser constantes e, por uma análise cuidadosa, podemos concluir que sejam iguais a uma constante da forma $-\lambda^2$

Introduzindo esta constante em 1-2-2, obtém-se duas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, que são:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 X = 0 \quad 1-2-3$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \lambda^2 T = 0 \quad 1-2-4$$

As equações 1-2-3 e 1-2-4 apresentam, respectivamente, as soluções:

$$X = A \cos \frac{\lambda}{a} x + B \sin \frac{\lambda}{a} x \quad 1-2-5$$

$$T = C \cos \lambda t + D \sin \lambda t \quad 1-2-6$$

Logo, a solução geral será da seguinte forma:

$$U(x,t) = (A \cos \frac{\lambda}{a} x + B \sin \frac{\lambda}{a} x)(C \cos \lambda t + D \sin \lambda t) \quad 1-2-7$$

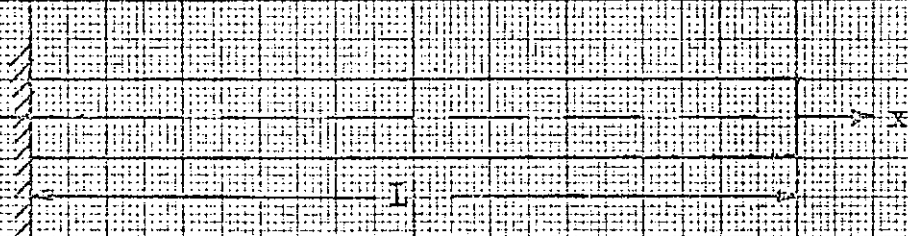
A equação 1-2-5 que chamamos de equação normal, é a que nos interessa mais, porque, de uma forma geral, define as frequências e os modos naturais de vibração.

Levando as condições de contorno, anteriormente citadas, à equação 1-2-7, obtém-se:

$$A = 0 \text{ e } \cos \frac{\lambda}{a} L = 0$$

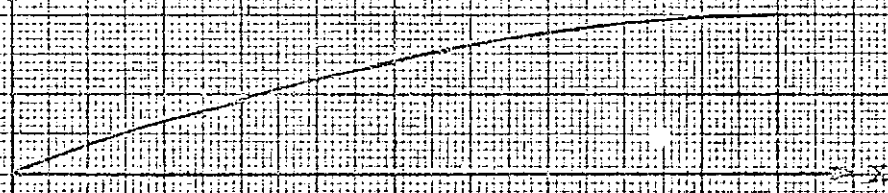
Para que isto seja verdadeiro, deveremos ter a igualdade:

$$\lambda_i = \left(i + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{S E}{m}} \quad 1-2-8$$



Barra com uma extremidade engastada e a outra livre

λ_0



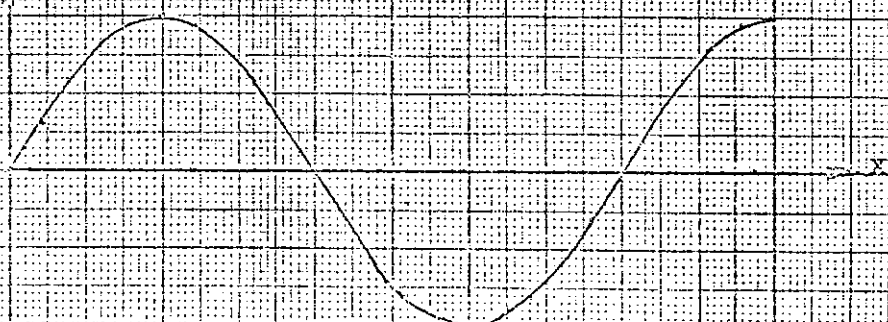
1º Modo natural $\lambda_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E I}{\rho}}$

λ_1



2º Modo natural $\lambda_1 = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{E I}{\rho}}$

λ_2



3º Modo natural $\lambda_2 = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{E I}{\rho}}$

Figura 1-2

A equação 1-2-8 é a chamada equação de frequências, da qual obtemos as diferentes frequências fundamentais, fazendo $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

Substituindo o valor de λ_i na equação 1-2-5, obtém-se a equação que define o modo natural correspondente dado pela seguinte equação:

$$X_i = B_i \sin \frac{\pi}{L} (i + \frac{1}{2}) x \quad 1-2-9$$

Fazendo em 1-2-9, $i = 0, 1, 2$ tem-se, na figura 1-2, as frequências e os modos naturais correspondentes.

Com os resultados obtidos, podemos escrever que a solução particular da equação 1-2-7 para o presente é dado por:

$$U_i(x, t) = \sin \frac{\pi}{L} (i + \frac{1}{2}) x \left[C_i \cos \frac{\pi a}{L} (i + \frac{1}{2}) t + D_i \sin \frac{\pi a}{L} (i + \frac{1}{2}) t \right] \quad 1-2-10$$

Para a solução mais geral do caso tem-se a seguinte equação:

$$U(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sin \frac{\pi}{L} (i + \frac{1}{2}) x \left[C_i \cos \frac{\pi a}{L} (i + \frac{1}{2}) t + D_i \sin \frac{\pi a}{L} (i + \frac{1}{2}) t \right] \quad 1-2-11$$

1-3. Vibração longitudinal da barra com duas extremidades livres.

Este caso está mostrado na figura 1-3, e, por serem as duas extremidades livres, tem-se as seguintes condições de contorno:

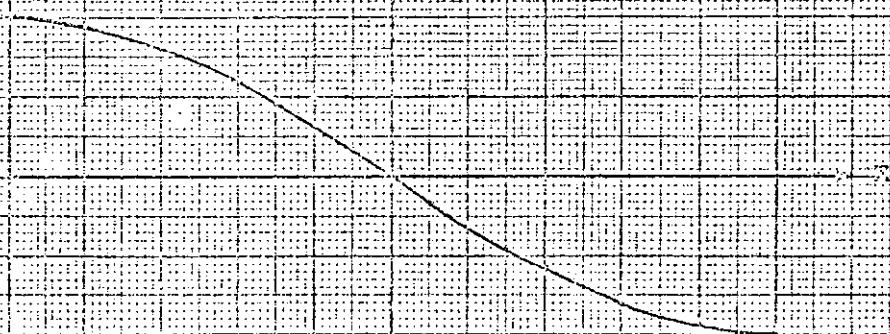
$$U_x(0, t) = 0$$

$$U_x(L, t) = 0$$

Introduzindo estas condições na equação 1-2-7, obtém-se, respectivamente, as equações de frequências, modos naturais de vibração e a

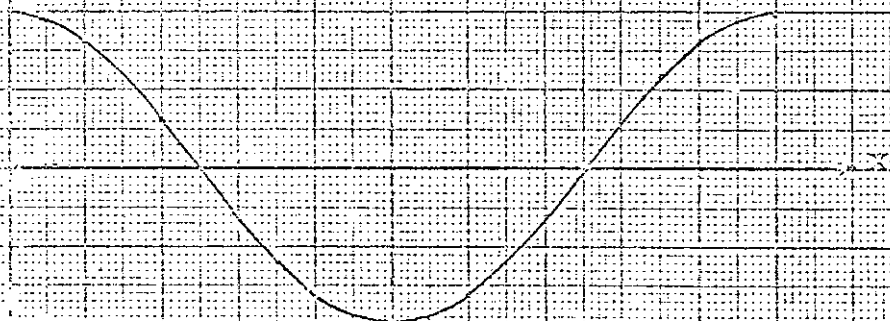
Barra com as duas extremidades livres

1



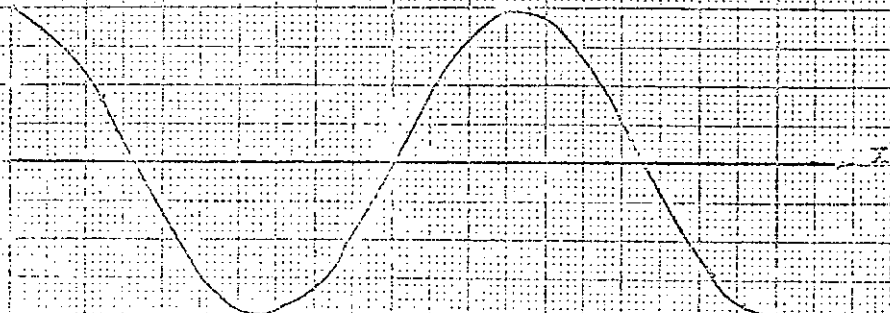
1º modo natural $\lambda_1 = \frac{1L}{2} \sqrt{\frac{EJ}{I_0}}$

2



2º modo natural $\lambda_2 = \frac{2L}{2} \sqrt{\frac{EJ}{I_0}}$

3



3º modo natural $\lambda_3 = \frac{3L}{2} \sqrt{\frac{EJ}{I_0}}$

com 3/2

solução geral:

$$\lambda_i = \frac{i\omega}{L} \sqrt{\frac{E S}{m}} \quad 1-3-1$$

$$X_i = A_i \cos \frac{i\omega x}{L} \quad 1-3-2$$

$$U(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \cos \frac{i\omega x}{L} \left(C_i \cos \frac{i\omega a}{L} t + D_i \sin \frac{i\omega a}{L} t \right) \quad 1-3-3$$

Na figura 1-3 tem-se ainda o gráfico dos três primeiros modos naturais e as frequências correspondentes.

1-4. Vibração longitudinal da barra com duas extremidades engastadas.

Como mostra a figura 1-4, sendo as secções das extremidades engastadas, as condições de contorno serão dadas pelas seguintes relações:

$$U(0,t) = 0$$

$$U(L,t) = 0$$

Procedendo de forma análoga aos casos anteriores, ou seja, introduzindo as condições de contorno na equação 1-2-7, obtém-se:

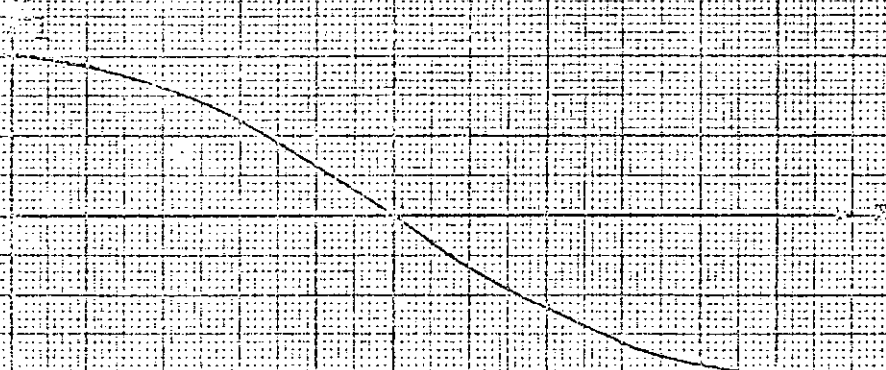
$$\lambda_i = \frac{i\omega}{L} \sqrt{\frac{E S}{m}} \quad 1-4-1$$

$$X_i = B_i \sin \frac{i\omega x}{L} \quad 1-4-2$$

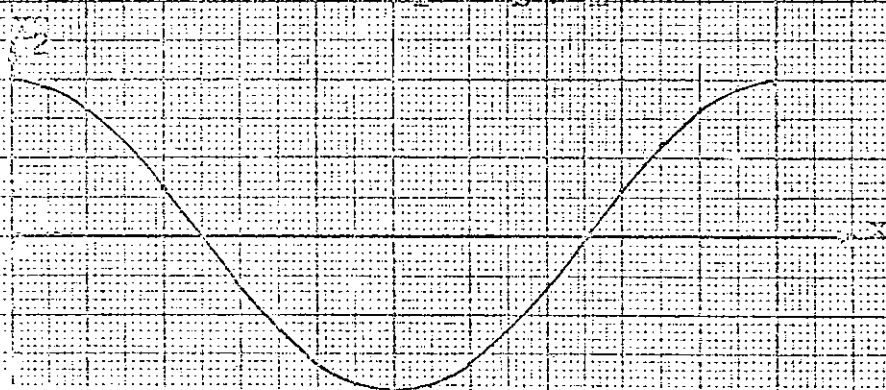
$$U(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sin \frac{i\omega x}{L} \left(C_i \cos \frac{i\omega a}{L} t + D_i \sin \frac{i\omega a}{L} t \right) \quad 1-4-3$$

Estas equações, são, respectivamente, a equação de

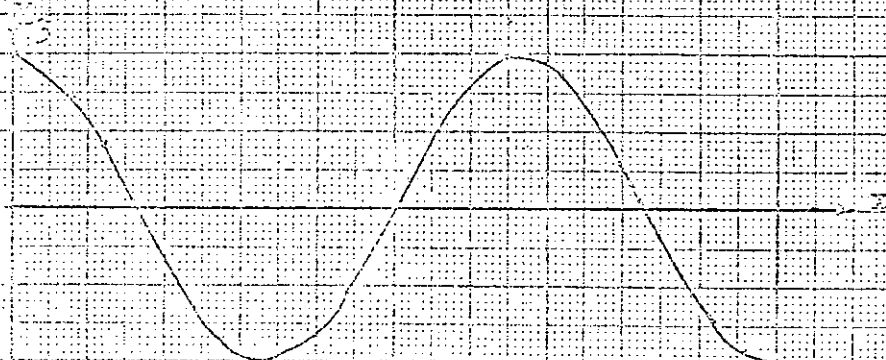
Barra com as duas extremidades livres



1º Modo natural $\lambda_1 = \frac{4L}{3} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$



2º Modo natural $\lambda_2 = \frac{2L}{3} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$



3º Modo natural $\lambda_3 = \frac{2L}{3} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$

Exercício 13

solução geral:

$$\lambda_i = \frac{i\pi}{L} \sqrt{\frac{E S}{m}} \quad 1-3-1$$

$$X_i = A_i \cos \frac{i\pi x}{L} \quad 1-3-2$$

$$U(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \cos \frac{i\pi x}{L} \left(C_i \cos \frac{i\pi a}{L} t + D_i \sin \frac{i\pi a}{L} t \right) \quad 1-3-3$$

Na figura 1-3 tem-se ainda o gráfico dos três primeiros modos naturais e as frequências correspondentes.

1-4. Vibração longitudinal da barra com duas extremidades engastadas.

Como mostra a figura 1-4, sendo as secções das extremidades engastadas, as condições de contorno serão dadas pelas seguintes relações:

$$U(0,t) = 0$$

$$U(L,t) = 0$$

Procedendo de forma análoga aos casos anteriores, ou seja, introduzindo as condições de contorno na equação 1-2-7, obtém-se:

$$\lambda_i = \frac{i\pi}{L} \sqrt{\frac{E S}{m}} \quad 1-4-1$$

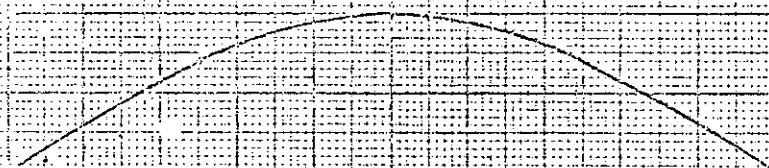
$$X_i = B_i \sin \frac{i\pi x}{L} \quad 1-4-2$$

$$U(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sin \frac{i\pi x}{L} \left(C_i \cos \frac{i\pi a}{L} t + D_i \sin \frac{i\pi a}{L} t \right) \quad 1-4-3$$

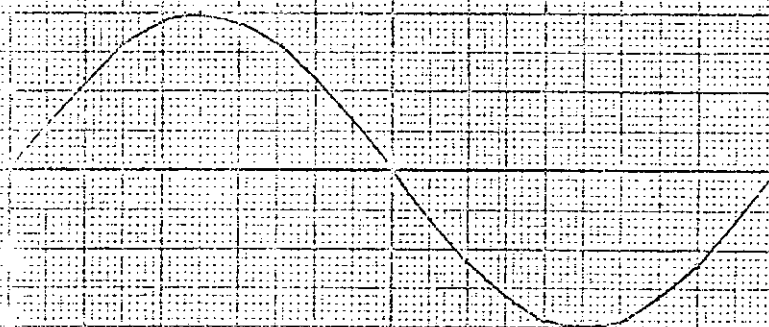
Estas equações, são, respectivamente, a equação de



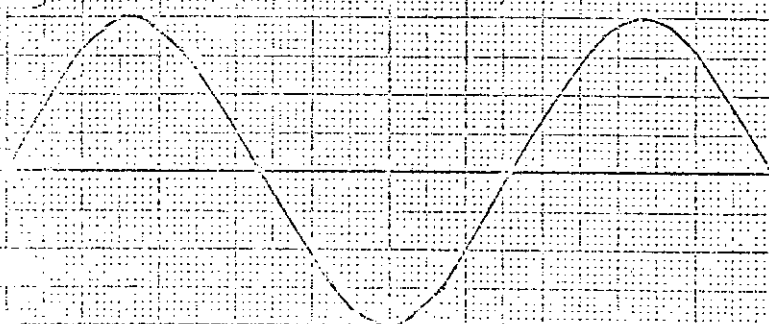
Barra com as duas extremidades engastadas



1º Modo natural $\lambda_1 = \frac{\pi L}{2} \sqrt{\frac{E I}{\rho A}}$



2º Modo natural $\lambda_2 = \frac{2\pi L}{2} \sqrt{\frac{E I}{\rho A}}$



3º Modo natural $\lambda_3 = \frac{3\pi L}{2} \sqrt{\frac{E I}{\rho A}}$

frequências, modos naturais de vibração e a solução geral.

Para $i = 1, 2, 3$ tem-se, na figura 1-4, os três primeiros modos naturais de vibração e as frequências correspondentes.

1-5. Vibração longitudinal de molas helicoidais cilíndricas.

Para determinar as frequências de vibração longitudinal de molas helicoidais cilíndricas, basta que transformemos esta mola numa barra uniforme equivalente e apliquemos os resultados dos três exemplos anteriores. Esta equivalência se resume em determinar o valor da constante k . Para a mola helicoidal cilíndrica, tem-se:

$$K = \frac{G d^4}{8 D^3 n} \quad \text{constante de mola}$$

D = diâmetro médio da espira

d = diâmetro do fio de arame

n = número de espiras

G = módulo de elasticidade transversal do material

Sendo ΔL a deformação que sofre a barra e a mola ao aplicarmos uma força longitudinal F , pode-se escrever a seguinte relação:

$$F = \frac{E S \Delta L}{L} = \frac{G d^4 \Delta L}{8 D^3 n}$$

Desta igualdade tiramos o seguinte valor:

$$E S = \frac{G d^4 L}{8 D^3 n} \quad 1-5-1$$

Para massa por unidade de comprimento da mola, tem-se:

$$m = \frac{G^2 d^2 D n}{8 E L} \quad 1-5-2$$

Em que γ é o peso específico do material e g a aceleração da gravidade.

A partir dos valores de 1-5-1 e 1-5-2 obtém-se o valor de a , ou seja:

$$a^2 = \frac{E G d^2 L^2}{2 \gamma D^4 n^2 \pi^2} \quad 1-5-3$$

Com base nos exemplos anteriores, tem-se as equações de frequências de vibração longitudinal de molas helicoidais cilíndricas, para os seguintes casos:

1-5-1. Mola helicoidal cilíndrica com as extremidades livres.

$$\lambda_i = \frac{i d}{D^2 n} \sqrt{\frac{E G}{2 \gamma}} \text{ rd/s} \quad 1-5-4$$

1-5-2. Mola helicoidal cilíndrica com as extremidades engastadas.

$$\lambda_i = \frac{i d}{D^2 n} \sqrt{\frac{E G}{2 \gamma}} \text{ rd/s} \quad 1-5-5$$

1-5-3. Mola helicoidal cilíndrica com uma extremidade engastada e a outra livre.

$$\lambda_i = \left(i + \frac{1}{2}\right) \frac{d}{D^2 n} \sqrt{\frac{E G}{2 \gamma}} \text{ rd/s} \quad 1-5-6$$

1-6. Vibração longitudinal da barra com uma extremidade engastada e na outra uma mola.

Este caso está mostrado na figura 1-5, no qual tem-

as para condições de contorno as seguintes:

- Para $x = 0$, $U(0,t) = 0$ a secção está engastada.
- Para $x = L$, tem-se o equilíbrio entre a força da barra e da mola que é traduzido pela seguinte equação:

$$E S U_x(L,t) = - K U(L,t)$$

Introduzindo estas duas condições de contorno na equação 1-2-7, e por uma série de transformações, obtém-se a seguinte equação de frequências:

$$\alpha' \operatorname{sen} Z + Z \cos Z = 0 \quad 1-6-1$$

Da equação 1-6-1, pode-se tirar diferentes valores Z que a satisfazem e a partir destes as frequências naturais de vibração longitudinal, onde $Z = \lambda L/a$ e $\alpha' = K L/E S$ sendo a relação das constantes de mola.

Na tabela 1 estão calculados os cinco primeiros valores de Z , que satisfazem a equação 1-6-1, de onde pode-se calcular as correspondentes frequências para diferentes valores de α' .

Pode-se constatar na tabela 1 que os valores extremos de α' estão satisfeitos, ou seja, quando $\alpha' = 0$ tem-se o caso da barra com uma extremidade engastada e a outra livre e quando $\alpha' = \infty$ a barra se comporta como bi-engastada.

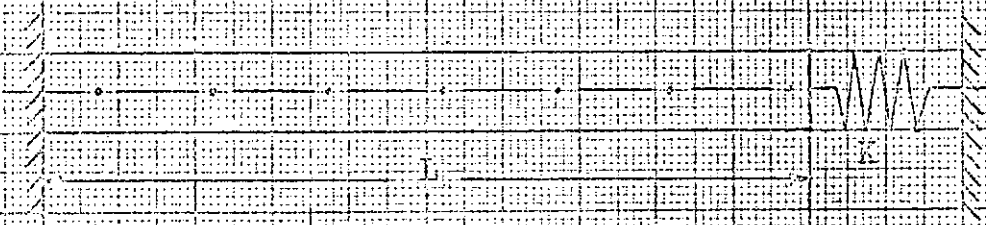
O método usado para a solução da equação 1-6-1, ou seja, para determinar as raízes, obtendo os valores da tabela 1, foi o de Newton-Raphson, também chamado o método das tangentes, a

presentando no presente caso uma rápida convergência, mesmo usando para a pesquisa das raízes um passo relativamente grande como está mostrado no programa 1.

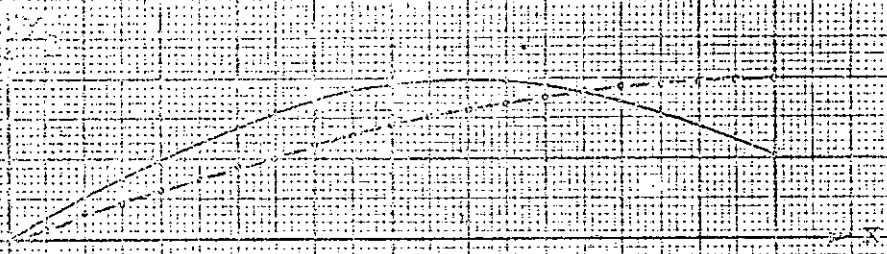
TABELA 1

α	0,000	0,002	0,004	0,008	0,016	0,032
Z_1	$\pi/2$	1,57207	1,57334	1,57587	1,58092	1,59051
Z_2	$3\pi/2$	4,71281	4,71324	4,71409	4,71578	4,71917
Z_3	$5\pi/2$	7,85424	7,85449	7,85500	7,85602	7,85805
Z_4	$7\pi/2$	10,99576	10,99594	10,99630	10,99703	10,99848
Z_5	$9\pi/2$	14,13731	14,13745	14,13773	14,13830	14,13943
α	0,064	0,128	0,256	0,512	1,024	2,048
Z_1	1,61051	1,64830	1,71866	1,84192	2,03667	2,29860
Z_2	4,72593	4,73939	4,76605	4,81825	4,91768	5,09461
Z_3	7,86212	7,87024	7,88643	7,91855	7,98158	8,10158
Z_4	11,00139	11,00720	11,01880	11,04191	11,08767	11,17680
Z_5	14,14169	14,14622	14,15525	14,17328	14,20911	14,27962
α	4,096	8,192	16,384	32,768	65,536	∞
Z_1	2,57957	2,81104	2,96270	3,04682	3,09441	π
Z_2	5,36450	5,67716	5,93561	6,09916	6,18903	2π
Z_3	8,31185	8,61424	8,95594	9,15241	9,26405	3π
Z_4	11,34213	11,61005	11,93673	12,20970	12,37967	4π
Z_5	14,41404	14,66712	14,96771	15,27183	15,47607	5π

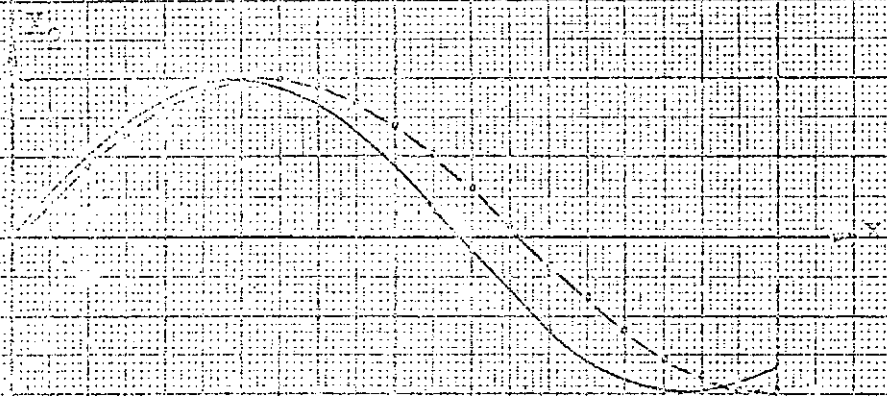
A equação dos modos naturais de vibração do presen-



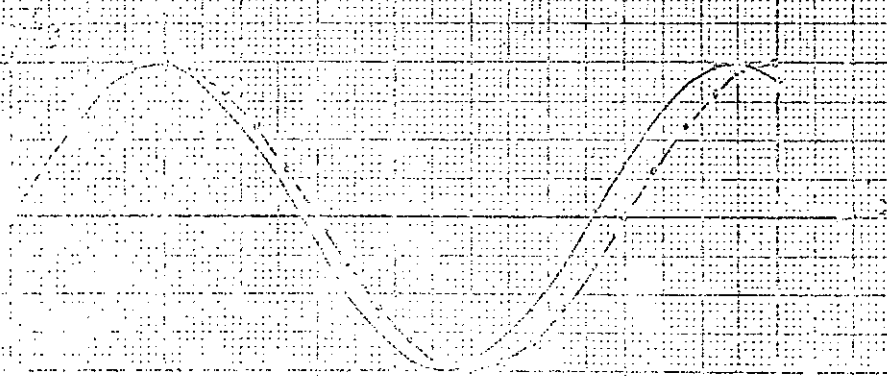
Stringa cu ambele extremități ancorate și la o capăt o mola



1^o mod normal $\lambda_1 = \frac{2L}{3} \sqrt{\frac{ES}{\rho}}$



2^o mod normal $\lambda_2 = \frac{4L}{3} \sqrt{\frac{ES}{\rho}}$



3^o mod normal $\lambda_3 = \frac{6L}{3} \sqrt{\frac{ES}{\rho}}$

te caso é dado por:

$$X_i = B_i \operatorname{sen} \frac{\lambda_i x}{a} \quad 1-6-2$$

Sendo $Z_i = \lambda_i L/a$ logo $\lambda_i = Z_i a/L$, fazendo para exemplo $L = 100\text{cm}$, $B_i = 2$, a equação dos modos naturais de vibração torna-se a seguinte:

$$X_i = 2 \operatorname{sen} \frac{Z_i}{100} x \quad 1-6-3$$

Com os dados anteriores e para $\alpha = 4,096$ tem-se, na figura 1-5 os gráficos dos três primeiros modos naturais de vibração comparados com o caso da barra com uma extremidade engastada e a outra livre.

1-7. Vibração longitudinal da barra com uma extremidade engastada e na outra uma massa.

A figura 1-6 mostra a barra de comprimento L com uma extremidade engastada e na outra fixa a massa M .

Como condições de contorno, tem-se:

- para $x = 0$ sendo o engaste $U(0,t) = 0$
- para $x = L$ há o equilíbrio de forças dado pela relação

$$E S U_x(L,t) = M U_{tt}(L,t)$$

Levando estas condições na equação 1-2-7 conclui-se que $A = 0$ e $\frac{E S}{\lambda_i} \cos \frac{\lambda_i L}{a} = M \operatorname{sen} \frac{\lambda_i L}{a}$

Esta última igualdade pode ser transformada na se -

quinta

$$Z \operatorname{sen} Z - \alpha \cos Z = 0$$

1-7-1

que é a equação de frequências na qual $\alpha = \frac{m}{M} \frac{J_1}{L}$ é a relação de massas e $Z = \frac{\lambda L}{a}$

A solução da equação 1-7-1 está mostrado na tabela 2, onde tem-se os cinco primeiros valores de Z que satisfazem a equação de frequências a partir dos quais pode-se calcular as correspondentes frequências naturais para diferentes valores de α .

Na solução da equação 1-7-1 foi experimentado o método da Regula Falsi, bem como o Newton - Raphson, os quais não apresentaram resultados satisfatórios.

Os valores da tabela 2 foram obtidos empregando o programa 2 que utiliza a subrotina RTMIT, cuja listagem esta apresentada a seguir.

Na tabela 2, no caso de $\alpha = 0$, o valor de Z nulo não tem significação, valendo, na realidade, para determinar a frequência fundamental, o valor $Z = \pi$, a barra se comporta como se fosse bi-engastada.

Como exemplo, consideramos o caso em que $\alpha = 0,64$, o comprimento da barra $L = 100$ cm e sendo $\lambda_1 = Z_1 a/L$, a equação dos modos naturais de vibração do presente caso é dado por:

$$X_1 = B_1 \operatorname{sen} \frac{Z_1}{L} x$$

1-7-2

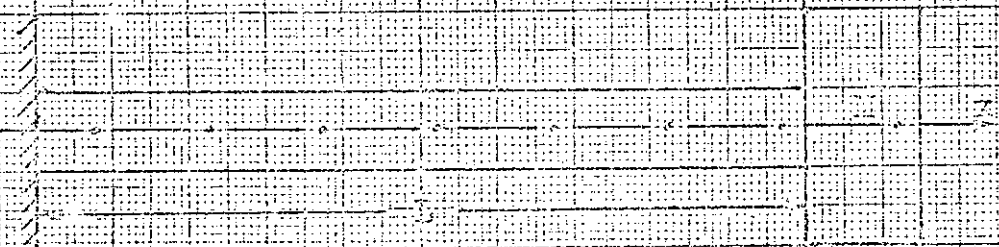
Na figura 1-6 estão mostrados os gráficos dos três primeiros modos naturais de vibração, onde $B_1 = 2$, e que são com-

parados com os modos naturais de vibração da barra com uma extremidade engastada e a outra livre.

TABELA 2

α	0,00	0,01	0,02	0,04	0,08	0,16
Z_1	0,00000	0,09983	0,14095	0,19868	0,27913	0,38964
Z_2	π	3,14477	3,14795	3,15427	3,76685	3,19168
Z_3	2π	6,28478	6,28637	6,28954	6,29589	6,30854
Z_4	3π	9,42539	9,42690	9,42902	9,43326	9,44172
Z_5	4π	12,56717	12,56796	12,56955	12,57273	12,57909
α	0,32	0,64	1,28	2,56	5,12	10,24
Z_1	0,53722	0,72394	0,93826	1,14894	1,31871	1,43187
Z_2	3,24004	3,33139	3,49286	3,74163	4,04389	4,31369
Z_3	6,33366	6,38312	6,47826	6,65063	6,92017	7,23864
Z_4	9,45860	9,49210	9,55791	9,68324	9,90199	10,21157
Z_5	12,59178	12,61705	12,66709	12,76430	12,94306	13,22523
α	20,48	40,96	81,92	163,84	∞	-----
Z_1	1,49779	1,53338	1,55186	1,56127	$\pi/2$	-----
Z_2	4,49627	4,60054	4,65562	4,68381	$3\pi/2$	-----
Z_3	7,50282	7,66890	7,75954	7,80637	$5\pi/2$	-----
Z_4	10,52102	10,73916	10,86373	10,92897	$7\pi/2$	-----
Z_5	13,55258	13,81184	13,96826	14,05161	$9\pi/2$	-----

Podemos constatar pela figura 1-6 que a diferença entre os dois casos não é tão acentuada no primeiro e segundo modo, enquanto que o terceiro já se aproxima do caso da barra bi-engastada.



2. $f(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{if } 1 \leq x \leq 2 \\ x-1 & \text{if } 2 \leq x \leq 3 \\ 4-x & \text{if } 3 \leq x \leq 4 \\ x-3 & \text{if } 4 \leq x \leq 5 \\ 6-x & \text{if } 5 \leq x \leq 6 \\ x-5 & \text{if } 6 \leq x \leq 7 \\ 8-x & \text{if } 7 \leq x \leq 8 \\ x-7 & \text{if } 8 \leq x \leq 9 \\ 10-x & \text{if } 9 \leq x \leq 10 \end{cases}$

x_1

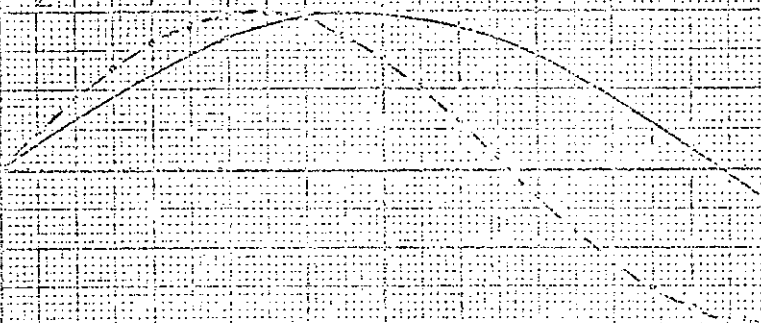


3. $f(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{if } 1 \leq x \leq 2 \\ x-1 & \text{if } 2 \leq x \leq 3 \\ 4-x & \text{if } 3 \leq x \leq 4 \\ x-3 & \text{if } 4 \leq x \leq 5 \\ 6-x & \text{if } 5 \leq x \leq 6 \\ x-5 & \text{if } 6 \leq x \leq 7 \\ 8-x & \text{if } 7 \leq x \leq 8 \\ x-7 & \text{if } 8 \leq x \leq 9 \\ 10-x & \text{if } 9 \leq x \leq 10 \end{cases}$

$2 \leq x \leq 3$

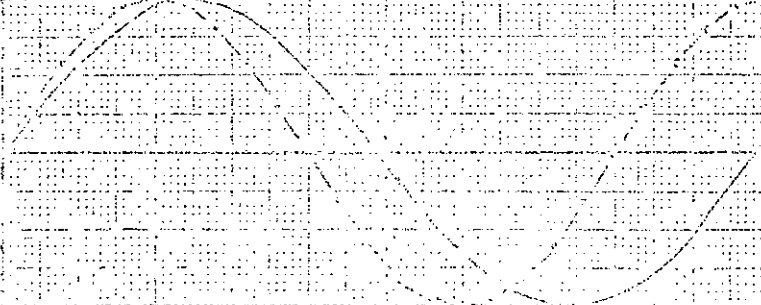
$3 \leq x \leq 4$

x_2



4. $f(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{if } 1 \leq x \leq 2 \\ x-1 & \text{if } 2 \leq x \leq 3 \\ 4-x & \text{if } 3 \leq x \leq 4 \\ x-3 & \text{if } 4 \leq x \leq 5 \\ 6-x & \text{if } 5 \leq x \leq 6 \\ x-5 & \text{if } 6 \leq x \leq 7 \\ 8-x & \text{if } 7 \leq x \leq 8 \\ x-7 & \text{if } 8 \leq x \leq 9 \\ 10-x & \text{if } 9 \leq x \leq 10 \end{cases}$

x_3



1-8. Vibração longitudinal da barra com massa nas duas extremidades.

Na figura 1-7 tem-se uma barra de comprimento L , massas M_1 e M_2 nas extremidades.

Nêste caso, para condições de contorno, tem-se:

$$E S U_x(0, t) = M_1 U_{tt}(0, t) \quad 1-8-1$$

$$E S U_x(L, t) = - M_2 U_{tt}(L, t) \quad 1-8-2$$

Se levarmos estas condições de contorno na equação 1-2-7, obtêm-se as seguintes igualdades:

$$S E \frac{\lambda}{a} B = - \lambda^2 M_1 A \quad 1-8-3$$

$$S E \frac{\lambda}{a} (- A \operatorname{sen} \frac{\lambda L}{a} + B \cos \frac{\lambda L}{a}) = \lambda^2 M_2 (A \cos \frac{\lambda L}{a} + B \operatorname{sen} \frac{\lambda L}{a}) \quad 1-8-4$$

Substituindo o valor de A da igualdade 1-8-3 em 1-8-4, tem-se a seguinte equação de frequências:

$$(\alpha \beta - Z^2) \operatorname{sen} Z + Z(\alpha + \beta) \cos Z = 0 \quad 1-8-5$$

A equação 1-8-5 é obtida nesta forma, ao chamarmos $Z = \lambda L/a$ e sendo $m L$ a massa total da barra tomarmos para relações de massas os seguintes valores:

$$\alpha = \frac{M_1 L}{m L}, \quad \beta = \frac{M_2 L}{m L}$$

A tabela 3 apresenta os três primeiros valores de Z

TABELA 3

$\beta \backslash \alpha$	0,00			0,01		
Z_1	Z_1	Z_2	Z_3	Z_1	Z_2	Z_3
0,00	0,00000	3,14159	6,28319	0,09983	3,14477	6,28478
0,01	0,09983	3,14477	6,28478	0,14130	3,14795	6,28637
0,02	0,14095	3,14795	6,28637	0,17292	3,15111	6,28796
0,04	0,19868	3,15427	6,28954	0,22265	3,15743	6,29113
0,08	0,27913	3,16685	6,29589	0,29688	3,16998	6,29748
0,16	0,38964	3,19168	6,30854	0,40287	3,19476	6,31012
0,32	0,53722	3,24004	6,33367	0,54733	3,24303	6,33523
0,64	0,72394	3,33139	6,38312	0,73206	3,33423	6,38466
1,28	0,93826	3,49286	6,47826	0,94528	3,49548	6,47976
2,56	1,14894	3,74163	6,65063	1,15547	3,74401	6,65206
5,12	1,31871	4,04389	6,92017	1,32509	4,04609	6,92152
10,24	1,43187	4,31369	7,23864	1,43821	4,31583	7,23994
20,48	1,49779	4,49627	7,50282	1,50413	4,49840	7,50409
40,96	1,53338	4,60054	7,66890	1,53972	4,60266	7,67017
81,92	1,55186	4,65562	7,75954	1,55820	4,65774	7,76082
163,84	1,56127	4,68381	7,80637	1,56761	4,68593	7,80764
∞	$\pi/2$	$3\pi/2$	$5\pi/2$	1,57714	4,71451	7,85525

que satisfazem a equação 1-8-5 para diferentes combinações de α e β , cujos valores foram determinados por um programa tipo 2, introduzindo apenas pequenas modificações.

A equação dos modos naturais de vibração pode ser es

TABELA 3
(continuação)

$\beta \backslash \alpha$	0,02			0,04		
Z_i	Z_1	Z_2	Z_3	Z_1	Z_2	Z_3
0,00	0,14095	3,14795	6,28637	0,19868	3,15427	6,28954
0,01	0,17292	3,15111	6,28796	0,22265	3,15743	6,29113
0,02	0,19967	3,15427	6,28955	0,24414	3,16058	6,29272
0,04	0,24414	3,16058	6,29272	0,28190	3,16685	6,29589
0,08	0,31353	3,17310	6,29906	0,34413	3,17933	6,30223
0,16	0,41559	3,19784	6,31170	0,43971	3,20397	6,31485
0,32	0,55719	3,24602	6,33680	0,57623	3,25198	6,33993
0,64	0,74005	3,33707	6,38620	0,75563	3,34273	6,38928
1,28	0,95221	3,49809	6,48125	0,96580	3,50331	6,48425
2,56	1,16193	3,74638	6,65349	1,17465	3,75112	6,65635
5,12	1,33141	4,04830	6,92287	1,34387	4,05270	6,92557
10,24	1,44450	4,31797	7,24123	1,45692	4,32224	7,24383
20,48	1,51042	4,50052	7,50537	1,52284	4,50476	7,50793
40,96	1,54601	4,60478	7,67144	1,55843	4,60901	7,67399
81,92	1,56448	4,65936	7,76209	1,57691	4,66409	7,76463
163,84	1,57390	4,68805	7,80892	1,58632	4,69228	7,81146
co	1,58343	4,71663	7,85653	1,59586	4,72086	7,85907

escrita da seguinte forma:

$$Y_i = B_i \left[-\frac{\alpha}{Z_i} \cos \frac{Z_i}{L} x + \sin \frac{Z_i}{L} x \right]$$

TABELA 3
(continuação)

$\beta \backslash \alpha$	0,08			0,16		
Z_i	Z_1	Z_2	Z_3	Z_1	Z_2	Z_3
0,00	0,27913	3,16685	6,29589	0,38964	3,19168	6,30854
0,01	0,29688	3,15998	6,29748	0,40287	3,19476	6,31012
0,02	0,31353	3,17310	6,29906	0,41559	3,19784	6,31170
0,04	0,34413	3,17933	6,30223	0,43971	3,20397	6,31485
0,08	0,39735	3,19171	6,30855	0,48353	3,21617	6,32115
0,16	0,48353	3,21617	6,32115	0,55825	3,24027	6,33370
0,32	0,61187	3,26383	6,34617	0,67523	3,28727	6,35863
0,64	0,78532	3,35399	6,39543	0,83961	3,37638	6,48770
1,28	0,99197	3,51370	6,49023	1,04070	3,53430	6,50216
2,56	1,19929	3,76055	6,66206	1,24568	3,77928	6,67345
5,12	1,36810	4,06147	6,93097	1,41401	4,07889	6,94173
10,24	1,48111	4,33075	7,24900	1,52714	4,34766	7,25933
20,48	1,54706	4,51321	7,51303	1,59325	4,53001	7,52320
40,96	1,58268	4,61746	7,67907	1,62896	4,63424	7,68922
81,92	1,60118	4,67253	7,76912	1,64750	4,68932	7,77986
163,84	1,61060	4,70072	7,81654	1,65695	4,71751	7,82669
∞	1,62013	4,72930	7,86415	1,66651	4,74609	7,89449

Para exemplo consideramos o seguinte caso:

$$\alpha = 0,08$$

$$\beta = 2,56$$

$$L = 100 \text{ cm}$$

TABELA 3
(continuação)

$\beta \backslash \alpha$	0,32			0,64		
Z_1	Z_1	Z_2	Z_3	Z_1	Z_2	Z_3
0,00	0,53722	3,24004	6,33367	0,72394	3,33139	6,38312
0,01	0,54733	3,24303	6,33523	0,73206	3,33423	6,38466
0,02	0,55719	3,24682	6,33680	0,74005	3,33707	6,38620
0,04	0,57623	3,25198	6,33993	0,75563	3,34273	6,38928
0,08	0,61187	3,26383	6,34617	0,78532	3,35399	6,39543
0,16	0,67523	3,28727	6,35863	0,83961	3,37628	6,40770
0,32	0,77928	3,33302	6,38336	0,93226	3,41989	6,43207
0,64	0,93226	3,41989	6,43207	1,07444	3,50301	6,48008
1,28	1,12623	3,57472	6,52587	1,26189	3,65217	6,57259
2,56	1,32849	3,81613	6,69610	1,46364	3,88716	6,74020
5,12	1,49695	4,11324	6,96314	1,63465	4,17970	7,00543
10,24	1,61066	4,38103	7,27989	1,75167	4,44576	7,32053
20,48	1,67756	4,56317	7,54346	1,82025	4,62759	7,58354
40,96	1,71360	4,66733	7,70942	1,85732	4,73181	7,74940
81,92	1,73232	4,72246	7,80005	1,87657	4,78693	7,84002
163,84	1,74155	4,75066	7,84688	1,88637	4,81515	7,88685
∞	1,75150	4,77525	7,89449	1,89629	4,84376	7,93447

Fazendo $B_1 = 2$ tem-se na figura 1-7 os gráficos dos três primeiros modos naturais de vibração, comparados com os modos naturais correspondentes da barra com as duas extremidades livres.

TABELA 3
(continuação)

$\beta \backslash \alpha$	1,28			2,56		
Z_1	Z_1	Z_2	Z_3	Z_1	Z_2	Z_3
0,00	0,93826	3,49286	6,47826	1,14894	3,74163	6,65063
0,01	0,94528	3,49548	6,47976	1,15547	3,74401	6,65206
0,02	0,95220	3,49809	6,48125	1,16193	3,74638	6,65349
0,04	0,96580	3,50331	6,48425	1,17465	3,76112	6,65635
0,08	0,99197	3,51370	6,49023	1,19929	3,76055	6,66206
0,16	1,04070	3,53430	6,50216	1,24568	3,77928	6,67345
0,32	1,12612	3,57472	6,52587	1,32849	3,81613	6,69610
0,64	1,26189	3,65217	6,57259	1,46364	3,88716	6,74080
1,28	1,44787	3,79259	6,66278	1,65514	4,01738	6,82726
2,56	1,65514	4,01738	6,82726	1,87651	4,23005	6,98571
5,12	1,83552	4,30267	7,08746	2,07529	4,50711	7,23872
10,24	1,96015	4,56624	7,39953	2,21522	4,76916	7,54598
20,48	2,03340	4,74791	7,66154	2,29826	4,95224	7,80667
40,96	2,07331	4,85238	7,82726	2,34323	5,05806	7,97245
81,92	2,09392	4,90768	7,91790	2,36656	5,11415	8,06329
163,84	2,10441	4,93600	7,96475	2,37843	5,14238	8,11027
∞	2,11503	4,96471	8,01240	2,39045	5,17201	8,15805

Segundo a figura 1-7, notamos uma grande diferença entre os modos naturais de vibração da barra com massa em ambas as extremidades e a barra com as duas extremidades livres, no caso particular de α e β dados.

TABELA 3
(continuação)

$\beta \backslash \alpha$	5,12			10,24		
Z_1	Z_1	Z_2	Z_3	Z_1	Z_2	Z_3
0,00	1,31871	4,04389	6,92017	1,43187	4,31369	7,23864
0,01	1,32509	4,04609	6,92152	1,43821	4,31533	7,23994
0,02	1,33141	4,04830	6,92287	1,44450	4,31797	7,24123
0,04	1,34387	4,05270	6,92557	1,45692	4,32224	7,24383
0,08	1,36810	4,06147	6,93097	1,48111	4,33075	7,24900
0,16	1,41401	4,07889	6,94173	1,52714	4,34766	7,25933
0,32	1,49695	4,11324	6,96314	1,61086	4,38103	7,27989
0,64	1,68485	4,17970	7,00543	1,75167	4,44576	7,32053
1,28	1,83552	4,30267	7,08746	1,96015	4,56624	7,39960
2,56	2,07529	4,50712	7,23872	2,21522	4,76916	7,54598
5,12	2,29788	4,78087	7,48326	2,45834	5,04703	7,78563
10,24	2,45834	5,04703	7,78563	2,63743	5,32491	8,35323
20,48	2,55468	5,23625	8,04632	2,74627	5,52471	8,35323
40,96	2,60706	5,34637	8,21350	2,80576	5,64265	8,52530
81,92	2,63426	5,40485	8,30538	2,83673	5,70533	8,62021
163,84	2,64611	5,43481	8,35294	2,85251	5,73746	8,66939
∞	2,65212	5,46519	8,40131	2,86947	5,77005	8,71941

O primeiro modo natural é praticamente uma reta, verificando-se uma mínima influência da massa da barra.

De acordo com este resultado poderíamos determinar a frequência fundamental pela seguinte fórmula aproximada:

TABELA 3
(continuação)

$\beta \backslash \alpha$	20,48			40,96		
Z_1	Z_1	Z_2	Z_3	Z_1	Z_2	Z_3
0,00	1,49779	4,49627	7,50282	1,53333	4,60054	7,66890
0,01	1,90413	4,49840	7,56409	1,53972	4,60266	7,67017
0,02	1,51042	4,50052	7,50537	1,54601	4,60478	7,67144
0,04	1,52284	4,50476	7,50793	1,55843	4,60901	7,67399
0,08	1,54706	4,51321	7,51303	1,58268	4,61746	7,67907
0,16	1,59325	4,53001	7,52320	1,62895	4,63424	7,68922
0,32	1,67756	4,56317	7,54346	1,71360	4,66738	7,70942
0,64	1,82025	4,62759	7,58354	1,85732	4,73181	7,74940
1,28	2,03360	4,74791	7,66154	2,07331	4,85238	7,82726
2,56	2,29826	4,95224	7,80667	2,34323	5,05806	7,97245
5,12	2,55468	5,23625	8,04632	2,60706	5,34637	8,21350
10,24	2,74627	5,52491	8,35323	2,80576	5,64265	8,52530
20,48	2,86373	5,73694	8,62738	2,92821	5,86224	8,80687
40,96	2,92821	5,86224	8,80687	2,99558	5,99264	8,99255
81,92	2,96183	5,92913	8,90628	3,03075	6,06236	9,09566
163,84	2,97397	5,96345	8,95784	3,04869	6,09819	9,14923
∞	2,98632	5,99827	9,01031	3,06686	6,13452	9,20375

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{E S}{L} \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}}$$

O segundo modo natural e a frequência já se aproxima do caso da barra com uma extremidade engastada e a outra livre.

Como mostra o gráfico do terceiro modo natural, este

TABELA 3
(continuação)

$\beta \backslash \alpha$	81,92			163,84		
Z_4	Z_1	Z_2	Z_3	Z_1	Z_2	Z_3
0,00	1,55186	4,65562	7,75954	1,56127	4,68381	7,80637
0,01	1,55820	4,65734	7,76082	1,56761	4,68593	7,80764
0,02	1,56443	4,65966	7,76209	1,57390	4,68805	7,80892
0,04	1,57691	4,66409	7,76463	1,58632	4,69228	7,81146
0,08	1,60118	4,67253	7,76972	1,61060	4,70072	7,81654
0,16	1,64759	4,68932	7,77986	1,65695	4,71751	7,82669
0,32	1,73232	4,72246	7,80005	1,74185	4,75066	7,84688
0,64	1,87657	4,78693	7,84002	1,88637	4,81515	7,88685
1,28	2,09392	4,90773	7,91790	2,10441	4,93600	7,96475
2,56	2,36656	5,11415	8,06329	2,37843	5,14288	8,11027
5,12	2,63426	5,40485	8,30538	2,64811	5,43481	8,35294
10,24	2,83673	5,70533	8,62021	2,85251	5,73746	8,66939
20,48	2,96183	5,92913	8,90628	2,97897	5,96345	8,95784
40,96	3,03075	6,06238	9,09568	3,04869	6,09819	9,14923
81,92	3,06370	6,13372	9,20108	3,08512	6,17030	9,25584
163,84	3,08512	6,17036	9,25584	3,10571	6,20745	9,31124
∞	3,10572	6,20755	9,31160	3,12254	6,24509	9,36766

aproxima-se muito ao caso da barra bi-engastada.

A tabela 3 apresenta os seguintes casos limites:

1) $\alpha = 0, \beta = 0$ que corresponde ao caso de uma barra bi-engastada.
O valor de $Z_1 = 0,00$ não apresenta outro significado, do que, as ex

TABELA 3
(continuação)

$\beta \backslash \alpha$	∞		
Z_1	Z_1	Z_2	Z_3
0,00	$\pi/2$	$3\pi/2$	$5\pi/2$
0,01	1,57714	4,71451	7,85525
0,02	1,58343	4,71663	7,85653
0,04	1,59586	4,72086	7,85907
0,08	1,62013	4,72930	7,86415
0,16	1,66651	4,74609	7,87430
0,32	1,75150	4,77925	7,89449
0,64	1,89629	4,84376	7,93447
1,28	2,11503	4,96471	8,01240
2,56	2,39044	5,17201	8,15805
5,12	2,66212	5,46519	8,40131
10,24	2,86847	5,77005	8,71941
20,48	2,99632	5,99827	9,01031
40,96	3,06686	6,13452	9,28375
81,92	3,10372	6,20755	9,37160
163,84	3,12254	6,24509	9,39766
∞	π	2π	3π

extremidades não oscilam, sendo na realidade a frequência fundamental. O valor de Z_2 .

2º) $\alpha = 0, \beta = \infty$ corresponde à barra com uma extremidade engastada e a outra livre, dando-nos os resultados já obtidos no item 1-2.

10

100

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
 $\frac{1}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{256}$
 $\frac{1}{256} \times \frac{1}{256} = \frac{1}{65536}$

1. $\frac{1}{2}$

100

[illegible]

Figure 1

(c)

(d)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448	449	450	451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	52
--	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	----

Table 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----

100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----

Figure 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----

[illegible]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

100 100 100 100 100 100
 100 100 100 100 100 100
 100 100 100 100 100 100
 100 100 100 100 100 100
 100 100 100 100 100 100

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
 $\frac{1}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{256}$
 $\frac{1}{256} \times \frac{1}{256} = \frac{1}{65536}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----

100

100

•

Figure 1

[illegible]

Activity	10-14	15-19	20-24	25-29
Sleeping	10	10	10	10
Sedentary	10	15	20	25
Light	10	10	10	10
Moderate	10	10	10	10
Vigorous	15	10	5	5

3a) $\alpha = \infty, \beta = \infty$ é o caso da barra com as duas extremidades livres obtendo os resultados do item 1-3.

CAPÍTULO II

VIBRAÇÃO LONGITUDINAL DE BARRAS DE SECÇÃO VARIÁVEL

2-1. Barra com secção variando segundo a função $f(x) = c^2 e^{-2 k x}$.

No presente capítulo, consideramos somente os casos em que a variação da secção seja pequena em relação ao comprimento da barra. Para grandes variações precisamos levar em conta a influência das tensões tangenciais, que aqui é desprezado.

A equação diferencial de movimento oscilatório longitudinal já foi deduzida no item 1-1 e poderá ser transformada, por simples derivação, na seguinte:

$$E f(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + E \frac{\partial}{\partial x} \left(f(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - g(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad 2-2-1$$

Os resultados obtidos a seguir servem para barras de secção circular, retangular ou qualquer outra forma, desde que a função que expressa a secção seja da forma $c^2 e^{-2 k x}$.

Consideremos então o caso da figura 2-1, onde temos uma barra de raio variando segundo $r(x) = r_0 e^{-k x}$, de comprimento L , com uma extremidade engastada e a outra livre.

A função de secção será dada por $f(x) = \pi r_0^2 e^{-2 k x}$ enquanto a função de massa por unidade de comprimento é dada pela relação $g(x) = \rho \pi r_0^2 e^{-2 k x}$, onde ρ é a massa específica.

Substituindo as funções de secção e massa por unidade de comprimento, na equação 2-1-1 obtém-se a equação:

$$\frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{2kE}{\rho} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad 2-1-2$$

Pela equação 2-1-2, podemos constatar que a solução é da forma $U(x,t) = X T$, onde X e T são respectivamente funções de x e t , quando substituída na mesma, obtém-se:

$$\frac{E}{\rho} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{2kE}{\rho} \frac{1}{X} \frac{dX}{dx} = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -\lambda^2 \quad 2-1-3$$

Da equação 2-1-3 podemos tirar duas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem que são:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \lambda^2 T = 0 \quad 2-1-4$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - 2k \frac{dX}{dx} + (b\lambda)^2 X = 0 \quad 2-1-5$$

onde $b^2 = \rho/E$

A equação 2-1-4 tem por solução a seguinte:

$$T = C \cos \lambda t + D \sin \lambda t \quad 2-1-6$$

Para a equação 2-1-5, pode-se escrever a solução:

$$X = A e^{(k + \sqrt{k^2 - b^2 \lambda^2})x} + B e^{(k - \sqrt{k^2 - b^2 \lambda^2})x} \quad 2-1-7$$

Sendo a solução geral o produto das equações 2-1-6 e

2-1-7,obtem-se:

$$U(x,t) = e^{kx} (A e^{\sqrt{k^2 - b^2 \lambda^2} x} + B e^{-\sqrt{k^2 - b^2 \lambda^2} x}) (C \cos \lambda t + D \sin \lambda t) \quad 2-1-8$$

Pode-se constatar que a equação 2-1-8, quando $k = 0$, transforma-se na equação 1-2-7 que é a solução geral para o caso de barras uniformes.

Para evitar erros consideráveis nos resultados, o valor de k , como restrição, deve ser bem pequeno, com isto sendo b também pequeno mas λ grande, podemos considerar dentro dos limites válidos que $k \ll b$.

Com estas considerações a equação 2-1-8 pode ser escrita da seguinte forma:

$$U(x,t) = e^{kx} (A^* \cos \sqrt{b^2 \lambda^2 - k^2} x + B^* \sin \sqrt{b^2 \lambda^2 - k^2} x) (C \cos \lambda t + D \sin \lambda t) \quad 2-1-9$$

As condições de contorno do caso da figura 2-1 são:

$$U(0,t) = 0 \quad U_x(L,t) = 0$$

Introduzindo estas condições na equação 2-1-9 obtém-se que $A^* = 0$ e por uma série de transformações a seguinte equação de frequências:

$$\sin \sqrt{Z^2 - \alpha^2} + \sqrt{Z^2 - \alpha^2} \cos \sqrt{Z^2 - \alpha^2} = 0 \quad 2-1-10$$

onde $\alpha = kL$ e $Z = \lambda bL$.

A tabela 4 apresenta os cinco primeiros valores de Z que satisfazem a equação 2-1-10, calculados por um programa do tipo 2, para diferentes valores de α dos quais podemos determinar as correspondentes frequências.

A equação dos modos naturais de vibração é dada pela seguinte relação:

$$X_i = B_i e^{k x} \operatorname{sen} \sqrt{b^2 \lambda_i^2 - k^2} x \quad 2-1-11$$

Sendo $Z = b \lambda L$ e $\alpha = k L$, a equação anterior, pode-se transformar na seguinte:

$$X_i = B_i e^{k x} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{Z_i^2 - \alpha^2}}{L} x \quad 2-1-12$$

Para exemplo consideramos o caso $L = 100\text{cm}$ e $\alpha = 0,9852$ que com os resultados da tabela 4 quando levados na equação 2-1-12 tem-se os gráficos dos três primeiros modos naturais de vibração, traçados na figura 2-1.

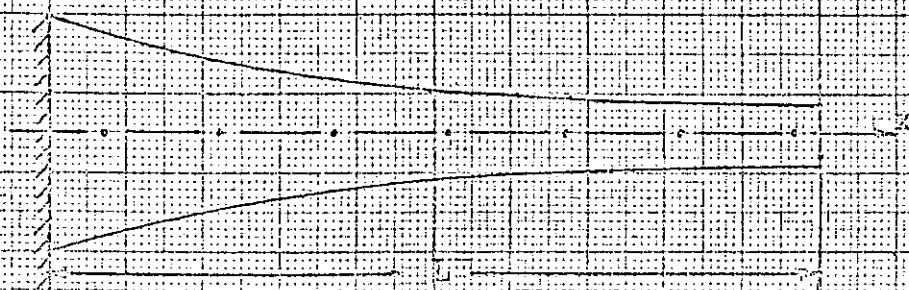
Os modos naturais de vibração da barra de secção variável estão comparados com os correspondentes da barra uniforme.

Podemos constatar uma razoável diferença entre os modos naturais da barra de secção uniforme e da barra de secção variável, uma vez que na última observa-se um acréscimo nos máximos, o que não acontece no caso de secção uniforme.

A tabela 4 nos mostra que a frequência cresce à medida que a secção da barra decresce, que se explica, fundamentalmente, pela diminuição maior da massa do que da rigidez da barra.

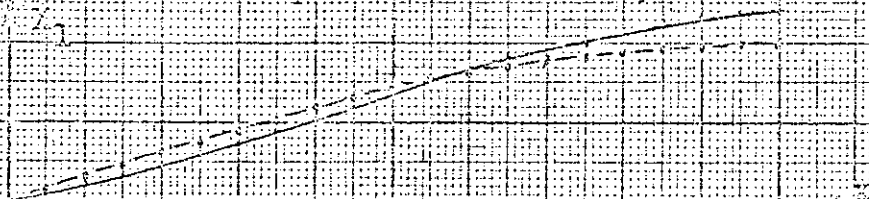
TABELA 4

α	0,0000	0,0010	0,0015	0,0022	0,0033
Z_1	$\pi/2$	1,57143	1,57175	1,57223	1,57295
Z_2	$3\pi/2$	4,71260	4,71271	4,71287	4,71311
Z_3	$5\pi/2$	7,85411	7,85417	7,85427	7,85441
Z_4	$7\pi/2$	10,99567	10,99571	10,99578	10,99588
Z_5	$9\pi/2$	14,13724	14,13727	14,13733	14,13741
α	0,0050	0,0075	0,0113	0,0170	0,0256
Z_1	1,57402	1,57563	1,57806	1,58169	1,58715
Z_2	4,71347	4,71401	4,71482	4,71604	4,71789
Z_3	7,85463	7,85495	7,85544	7,85618	7,85729
Z_4	10,99604	10,99627	10,99661	10,99714	10,99793
Z_5	14,13753	14,13771	14,13798	14,13839	14,13900
α	0,0384	0,0576	0,0864	0,1297	0,1946
Z_1	1,59536	1,60771	1,62631	1,65440	1,69694
Z_2	4,72069	4,72495	4,73146	4,74152	4,75729
Z_3	7,85897	7,86153	7,86545	7,87153	7,88108
Z_4	10,99914	11,00097	11,00378	11,00813	11,01496
Z_5	14,13994	14,14136	14,14355	14,14693	14,15226
α	0,2919	0,4378	0,6568	0,9852	1,4778
Z_1	1,76164	1,86063	2,01329	2,25093	2,62458
Z_2	4,78239	4,82322	4,89138	5,00828	5,21365
Z_3	7,89636	7,92140	7,96369	8,03749	8,17063
Z_4	11,02582	11,04392	11,07443	11,12793	11,22533
Z_5	14,16079	14,17483	14,19865	14,24053	14,31706



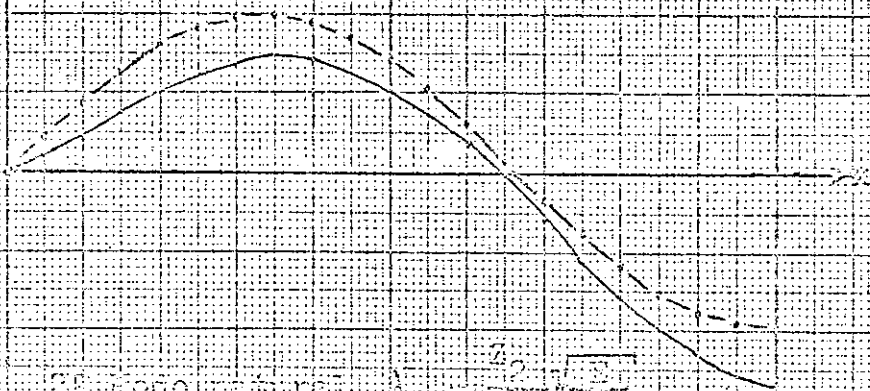
1º modo natural em forma exp. e antitranscend. livre e engastada

X_1



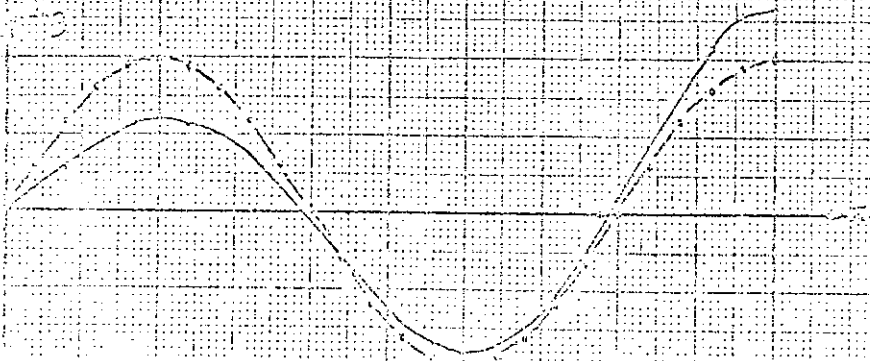
1º modo natural $\lambda_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

X_2



2º modo natural $\lambda_2 = \frac{3\pi}{2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

X_3



3º modo natural $\lambda_3 = \frac{5\pi}{2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

X_4



4º modo natural $\lambda_4 = \frac{7\pi}{2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

É conveniente não usarmos valores de α maiores do que os indicados na tabela, isto por que, ao resolvermos a equação 2-1-10, houve uma dispersão para valores superiores, provavelmente proveniente de problemas de computação.

2-2. Barra com secção variando segundo a função $f(x) = c^2 x^{-2n}$.

Nêste caso, para efeito de solução, poderíamos ter qualquer valor de n , mas, para precisão de resultados, devemos usar, pelo menos, o seguinte valor: $0 \leq n \leq 1$.

Para o caso da secção circular, a função de secção e a função de massa por unidade de comprimento são, respectivamente, as seguintes:

$$f(x) = \pi r_0^2 x^{-2n} \qquad g(x) = \rho \pi r_0^2 x^{-2n}$$

Introduzindo estas funções na equação 2-1-1 e simplificando, obtém-se:

$$\frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{2n}{x} \frac{E}{\rho} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \qquad 2-2-1$$

A equação 2-2-1 também pode ser resolvida por separação de variáveis, supondo a solução da forma $U(x,t) = X T$, que substituída em 2-2-1 e procedendo de forma análoga aos casos anteriores, tem-se:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \lambda^2 T = 0 \qquad 2-2-2$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{2n}{x} \frac{dX}{dx} + \frac{\rho}{E} \lambda^2 X = 0 \qquad 2-2-3$$

Para a solução da equação 2-2-3, convém transformá-la na seguinte:

$$x \frac{d^2 X}{dx^2} - 2n \frac{dX}{dx} + b^2 \lambda^2 x X = 0 \quad 2-2-4$$

onde $b^2 = \rho/E$.

A equação 2-2-4, como se apresenta, é uma equação diferencial de coeficientes variáveis cuja solução torna-se fácil ao enquadrarmos na equação de Bessel generalizada que é a seguinte:

$$x^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + \left[(1 - 2A)x - 2Bx^2 \right] \frac{dX}{dx} + \left[C^2 D^2 x^2 C + B^2 x^2 - B(1 - 2A)x + A^2 - C\tilde{v}^2 \right] X = 0 \quad 2-2-5$$

que apresenta, como solução, a equação

$$X = x^A e^{Bx} \left[C_1 J_{\tilde{v}}(Dx^C) + C_2 Y_{\tilde{v}}(Dx^C) \right] \quad 2-2-6$$

Nas equações 2-2-5 e 2-2-6 os valores de A, B, C e D são constantes, $J_{\tilde{v}}$ é a função de Bessel de primeira espécie e ordem \tilde{v} e $Y_{\tilde{v}}$ é a função de Bessel de segunda espécie e ordem \tilde{v} .

Para enquadrar a equação 2-2-4 na equação 2-2-5 devemos ter:

$$A = \frac{2n+1}{2}; \quad B = 0; \quad C = 1; \quad D = b; \quad \text{e} \quad \tilde{v} = \frac{2n+1}{2}$$

Levando êstes valores na equação 2-2-6 obtém-se a solução:

$$X = x^{\frac{2n+1}{2}} \left[C_1 J_{\frac{2n+1}{2}}(b\lambda x) + C_2 Y_{\frac{2n+1}{2}}(b\lambda x) \right] \quad 2-2-7$$

A seguir, apresentaremos a análise de alguns casos particulares do valor de n que são:

2-2-1. $n = 0$; Neste caso a barra é de secção uniforme e a equação 2-2-7 transforma-se na seguinte:

$$X = x^{\frac{1}{2}} \left[C_1 J_{\frac{1}{2}}(b\lambda x) + C_2 Y_{\frac{1}{2}}(b\lambda x) \right] \quad 2-2-8$$

Segundo as propriedades das funções de Bessel, pode-se escrever:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x \quad 2-2-9$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \quad 2-2-10$$

$$Y_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi} \left[J_{\frac{1}{2}}(x) \cos \frac{1}{2}\pi - J_{-\frac{1}{2}}(x) \right] \quad 2-2-11$$

Introduzindo estas funções na equação 2-2-8, podemos transformá-la na que segue:

$$X = A \cos b\lambda x + B \operatorname{sen} b\lambda x$$

logo, a solução geral será

$$U(x,t) = (A \cos b\lambda x + B \operatorname{sen} b\lambda x)(C \cos \lambda t + D \operatorname{sen} \lambda t) \quad 2-2-12$$

Comparando a equação 2-2-12 com a equação 1-2-7, ve-

ificamos que são iguais, basta que identifiquemos os parâmetros.

2-2-2. $n = 0,5$. Levando isto na equação 2-2-7, esta se transforma na seguinte:

$$X = x [C_1 J_1(b\lambda x) + C_2 Y_1(b\lambda x)] \quad 2-2-13$$

Neste caso, se analisarmos a relação 2-2-11, concluímos que $C_2 = 0$; logo,

$$X = x C_1 J_1(b\lambda x) \quad 2-2-14$$

Com estes resultados a solução geral será:

$$U(x,t) = x J_1(b\lambda x) (C \cos \lambda t + D \sen \lambda t) \quad 2-2-15$$

2-2-3. $n = 1$. Com este valor a equação 2-2-7 transforma-se em

$$X = x^{\frac{3}{2}} C_1 J_{\frac{3}{2}}(b\lambda x) + C_2 Y_{\frac{3}{2}}(b\lambda x) \quad 2-2-16$$

Com auxílio das relações:

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sen x}{x} - \cos x \right) \quad 2-2-17$$

$$Y_{\frac{3}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\cos x}{x} + \sen x \right) \quad 2-2-18$$

a equação 2-2-16 poderá ser escrita da seguinte forma:

$$X = A(\sen b\lambda x - b\lambda x \cos b\lambda x) - B(\cos b\lambda x + b\lambda x \sen b\lambda x)$$

Com estas considerações, a solução geral será dada pela seguinte relação:

$$y(x,t) = [A(\sin b\lambda x - b\lambda x \cos b\lambda x) - B(\cos b\lambda x + b\lambda x \sin b\lambda x)] [C \cos \lambda t + D \sin \lambda t] \quad 2-2-20$$

Pela equação 2-2-20 podemos determinar as frequências e os modos naturais de vibração da barra de secção variável, para o caso particular de $n = 1$, dependendo das condições de contorno.

2-3. Barra com secção variando segundo a função $f(x) = S_0 (1 - kx)^2$

Os casos com esta variação de secção, ainda apresentam uma solução analítica.

As barras que se enquadram neste tipo de função de secção são as de forma de prismas tronco-cônicas.

O estudo a seguir vale para as barras de secção circular e retangular, desde que, nesta última, a variação das duas dimensões tenha a mesma proporção. Isto pode ser expresso pela seguinte relação:

$$h(x) = h_1 \left[1 - \frac{1}{L} \left(1 - \frac{h_2^2}{h_1^2} \right) x \right]$$

$$h(x) = h_1 \left[1 - \frac{1}{L} (1 - \alpha) x \right] \quad 2-3-1$$

em que

$$\alpha = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{a_2^2}{a_1^2} = \frac{b_2^2}{b_1^2} \text{ é uma relação de dimensões.}$$

$h_1 = r_1, a_1$ ou b_1 que são, respectivamente, o maior raio da secção circular e as maiores dimensões da secção retangular.

$h_2 = r_2, a_2$ ou b_2 o raio menor e as dimensões menores.

L = comprimento da barra.

Na figura 2-2 tem-se para exemplo o caso da barra em forma de tronco-cone, com raios r_1 e r_2 .

Fazendo $k = (1 - \alpha)/L$, tem-se para função de secção, a seguinte:

$$f(x) = \pi r_1^2 (1 - k x)^2 \quad 2-3-2$$

Para função de massa por unidade de comprimento pode-se escrever:

$$g(x) = \rho \pi r_1^2 (1 - k x)^2 \quad 2-3-3$$

Substituindo as equações 2-3-2 e 2-3-3 na equação 2-1-1, obtém-se:

$$\frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{2 k E}{\rho(1-kx)} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad 2-3-4$$

A equação 2-3-4 nos permite a separação de variáveis ao supormos que a solução seja também da forma $U(x,t) = X T$, e, ao substituírmos, teremos as seguintes equações:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \lambda^2 T = 0 \quad 2-3-5$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{2 k}{1-k x} \frac{\partial X}{\partial x} + b^2 \lambda^2 X = 0 \quad 2-3-6$$

A equação 2-3-6 é uma equação diferencial de segunda ordem de coeficientes variáveis que, para ser enquadrada na solução do tipo Bessel, precisamos efetuar a seguinte transformação de variável:

$$\frac{1}{y} = \frac{2k}{1 - kx}$$

Para introduzirmos esta transformação, tomamos:

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dX}{dy} \frac{dy}{dx} = - \frac{1}{2} \frac{dX}{dy}$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{d^2 X}{dy^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dX}{dy} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{4} \frac{d^2 X}{dy^2}$$

que substituídos na equação 2-3-6, nos dá

$$\frac{d^2 X}{dy^2} + \frac{2}{y} \frac{dX}{dy} + (2b\lambda)^2 X = 0 \quad 2-3-7$$

É conveniente que a equação 2-3-7 seja escrita da seguinte forma:

$$y^2 \frac{d^2 X}{dy^2} + 2y \frac{dX}{dy} + y^2 (b\lambda)^2 X = 0 \quad 2-3-8$$

Segundo a equação 2-2-5, as constantes devem ser:

$$A = -\frac{1}{2}; \quad B = 0; \quad C = 1; \quad D = 2b; \quad \tilde{V} = \frac{1}{2}$$

e que levados na equação 2-2-6, obtém-se a seguinte solução,

$$X = y^{-1/2} \left[C_1 J_{1/2}(2b\lambda y) + C_2 Y_{1/2}(2b\lambda y) \right] \quad 2-3-9$$

Com o auxílio das relações 2-2-9, 2-2-10 e 2-2-11, a equação anterior pode ser escrita como sendo:

$$X = \frac{1}{y}(A \cos 2 \cdot b \lambda y + B \sin 2 \cdot b \lambda y) \quad 2-3-10$$

Substituindo y por seu valor na equação 2-3-10, tem-se, finalmente, a solução:

$$X = \frac{1}{1 - k x} \left[A \cos \frac{b \lambda (1 - k x)}{k} + B \sin \frac{b \lambda (1 - k x)}{k} \right] \quad 2-3-11$$

Sendo a solução geral o produto das funções X e T temos:

$$U(x,t) = \frac{1}{1 - k x} \left[A \cos \frac{b \lambda (1 - k x)}{k} + B \sin \frac{b \lambda (1 - k x)}{k} \right] \left[C \cos \lambda t + D \sin \lambda t \right] \quad 2-3-12$$

Para condições de contorno da barra mostrada na figura 2-2, tem-se: $U(0,t) = 0$ $U_x(L,t) = 0$

Introduzindo as condições citadas anteriormente na equação geral obtém-se as seguintes igualdades:

$$A = - B \operatorname{tg} \frac{b \lambda}{k}$$

$$\left[A \cos \frac{b \lambda (1 - k L)}{k} + B \sin \frac{b \lambda (1 - k L)}{k} \right] + b \lambda (1 - k L) \left[A \sin \frac{b \lambda (1 - k L)}{k} - B \cos \frac{b \lambda (1 - k L)}{k} \right] = 0$$

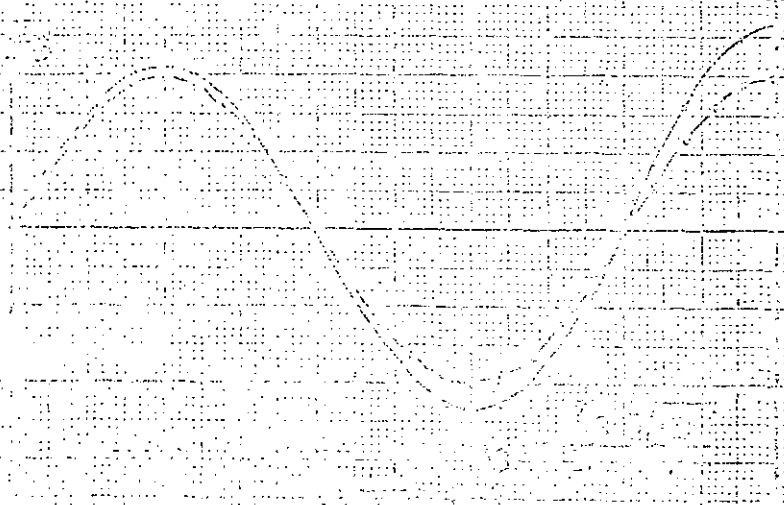
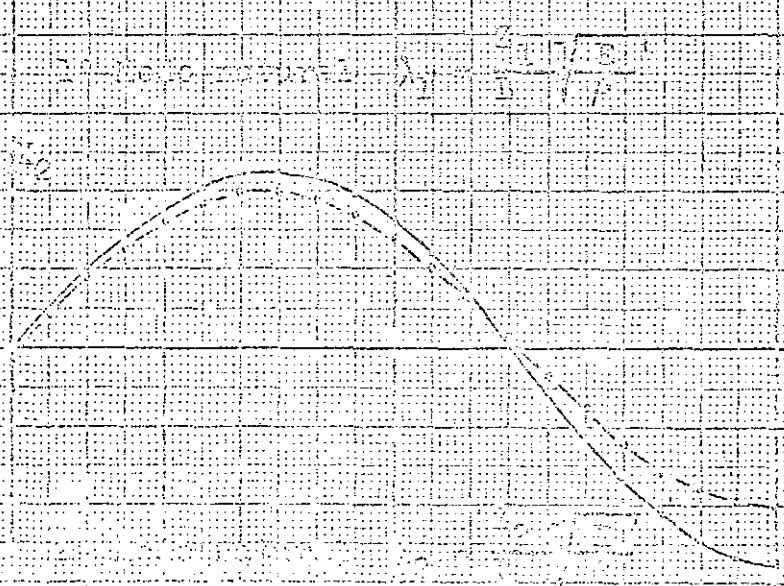
Substituindo o valor de A da primeira igualdade na segunda, e, por uma série de transformações, obtém-se a seguinte equação de frequências:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} + \frac{\alpha}{1 - \alpha^2} = 0 \quad 2-3-13$$

onde $Z = b \lambda L$.

TABELA 5

α	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
0,500	2,02876	4,91318	7,97867	11,08554	14,20744
0,525	1,99632	4,89515	7,96706	11,07707	14,20079
0,550	1,96529	4,87855	7,95645	11,06935	14,19474
0,575	1,93557	4,86322	7,94673	11,06229	14,18921
0,600	1,90709	4,84902	7,93777	11,05580	14,18413
0,625	1,87976	4,83583	7,92950	11,04982	14,17946
0,650	1,85352	4,82356	7,92185	11,04429	14,17514
0,675	1,82830	4,81211	7,91474	11,03916	14,17113
0,700	1,80404	4,80141	7,90812	11,03439	14,16741
0,725	1,78067	4,79139	7,90195	11,02995	14,16394
0,750	1,75816	4,78198	7,89617	11,02580	14,16070
0,775	1,73646	4,77314	7,89076	11,02191	14,15767
0,800	1,71551	4,76481	7,88567	11,01826	14,15483
0,825	1,69527	4,75695	7,88089	11,01483	14,15215
0,850	1,67572	4,74953	7,87638	11,01160	14,14964
0,875	1,65681	4,74250	7,87213	11,00855	14,14726
0,900	1,63851	4,73585	7,86810	11,00567	14,14502
0,925	1,62078	4,72953	7,86429	11,00294	14,14290
0,950	1,60361	4,72353	7,86068	11,00036	14,14087
0,975	1,57695	4,71782	7,85724	10,99791	14,13898
1,000	1,57060	4,71230	7,85392	10,99557	14,13717



Na tabela 5, tem-se os cinco primeiros valores de Z que satisfazem a equação 2-3-13, para valores de $\alpha = 0,5$ a 1, que foram obtidos por um programa tipo 2. A partir destes valores, com as dimensões da barra e com as características do material, pode-se determinar as correspondentes frequências naturais.

Para barras relativamente longas, poderíamos adotar valores de Z menores que os indicados na tabela, mas, de uma forma geral não recomendamos por razões já citadas no item 2-1.

Para equação dos modos naturais de vibração da barra tronco-cônica, com uma extremidade engastada e a outra livre, pode-se escrever:

$$X_i = \frac{1}{1 - k x} B_i \left[- \operatorname{tg} \frac{Z_i}{k L} \cos \frac{Z_i}{k L} (1 - k x) + \operatorname{sen} \frac{Z_i}{k L} (1 - k x) \right] \quad 2-3-14$$

Como exemplo, consideramos o caso em que $\alpha = 0,75$ e $L = 100\text{cm}$. Com estas dimensões e com os valores da tabela 4, que levados na equação 2-3-14 nos dá os gráficos da figura 2-2, sendo os três primeiros modos naturais de vibração comparados com os correspondentes da barra de secção uniforme.

É conveniente salientar que não estamos interessados em valores absolutos de amplitudes de vibração, mas na forma do modo natural de vibração.

A equação 2-3-14, nos mostra que dependendo das dimensões da barra pode haver uma total predominância da forma co-seno ou seno no modo natural de vibração.

2-4. Barra tronco-cônica com massa numa extremidade.

Na figura 2-3 está mostrada uma barra tronco-cônica com a maior seção engastada e, na menor, fixa uma massa M.

As condições de contorno serão:

$$U(0,t) = 0 \quad \text{e} \quad S_2 U_x(L,t) = -M U_{tt}(L,t)$$

Introduzindo estas condições na equação 2-3-12, obtém-se:

$$A = -B \operatorname{tg} \frac{b\lambda}{k} \quad 2-4-1$$

$$\begin{aligned} \text{e} \quad S_2 \left\{ \frac{k}{(1-kL)^2} \left[A \cos \frac{b\lambda(1-kL)}{k} + B \operatorname{sen} \frac{b\lambda(1-kL)}{k} \right] + \frac{b}{1-kL} \left[A \operatorname{sen} \frac{b\lambda(1-kL)}{k} - B \cos \frac{b\lambda(1-kL)}{k} \right] \right\} = \frac{\lambda^2 M}{(1-kL)} \left[A \cos \frac{b\lambda(1-kL)}{k} + B \operatorname{sen} \frac{b\lambda(1-kL)}{k} \right] \end{aligned} \quad 2-4-2$$

Levando a igualdade 2-4-1 em 2-4-2 e, por uma série de transformações obtém-se a seguinte equação de frequências:

$$\operatorname{tg} Z \cdot Z^2 \frac{M\alpha}{S_2 \rho L} - \frac{(1-\alpha)}{\alpha} - Z = 0 \quad 2-4-3$$

onde lembramos que $Z = b\lambda L$ e $\alpha = r_2/r_1$.

A equação 2-4-3, ao ser particularizada, nos dá resultados vistos anteriormente, que são:

- Para $k = 0$, ou seja, que a barra é uniforme de seção S_2 , obtém-se a equação

$$Z \operatorname{tg} Z = \frac{S_2 \rho L}{M} \quad 2-4-4$$

que nada mais é do que a equação 1-7-1.

- Para $M = 0$, obtém-se a equação 2-3-13.

A equação dos modos naturais de vibração pode ser escrita da forma:

$$X_i = \frac{B_i}{1 - k x} \left[- \operatorname{tg} \frac{Z_i}{k L} \cos \frac{Z_i(1 - k x)}{k L} + \operatorname{sen} \frac{Z_i(1 - k x)}{k L} \right] \quad 2-4-5$$

Como ilustração e para termos uma idéia dos resultados, tomamos para exemplo as seguintes dimensões :

$$r_1 = 10 \text{ cm}$$

$$r_2 = 7,5 \text{ cm}$$

$$L = 100 \text{ cm}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

$$M = 50 \text{ Kg}$$

Usando um programa tipo 2 obtém-se os seguintes resultados:

$$Z_1 = 1,42025$$

$$\lambda_1 = 7298,977 \text{ rd/s}$$

$$Z_2 = 3,93423$$

$$\lambda_2 = 20218,871 \text{ rd/s}$$

$$Z_3 = 6,79067$$

$$\lambda_3 = 34898,699 \text{ rd/s}$$

$$Z_4 = 12,84701$$

$$\lambda_4 = 50303,973 \text{ rd/s}$$

$$Z_5 = 15,93572$$

$$\lambda_5 = 66023,573 \text{ rd/s}$$

A figura 2-3, mostra os gráficos dos três primeiros modos naturais de vibração correspondentes às frequências calculadas acima.

2-5. Barra tronco-cônica com mola numa extremidade.

A figura 2-4 nos mostra a barra tronco cônica com a

maior secção engastada e, na menor, uma mola de constante K.

Para condições de contorno tem-se as seguintes:

$$U(0,t) = 0$$

$$E S_2 U_x(L,t) = -K U(L,t)$$

Levando as condições de contorno dadas anteriormente na equação 2-3-12 tem-se as igualdades:

$$A = -B \operatorname{tg} \frac{b\lambda}{k} \quad 2-5-1$$

$$E S_2 \left\{ \frac{k}{(1 - kL)^2} \left[A \cos \frac{b\lambda(1 - kL)}{k} + B \operatorname{sen} \frac{b\lambda(1 - kL)}{k} \right] + \frac{b\lambda}{1 - kL} \right\}$$

$$A \operatorname{sen} \frac{b\lambda(1 - kL)}{k} - B \cos \frac{b\lambda(1 - kL)}{k} \Bigg] = - \frac{K}{1 - kL} \left[A \cos \frac{b\lambda(1 - kL)}{k} + B \operatorname{sen} \frac{b\lambda(1 - kL)}{k} \right] \quad 2-5-2$$

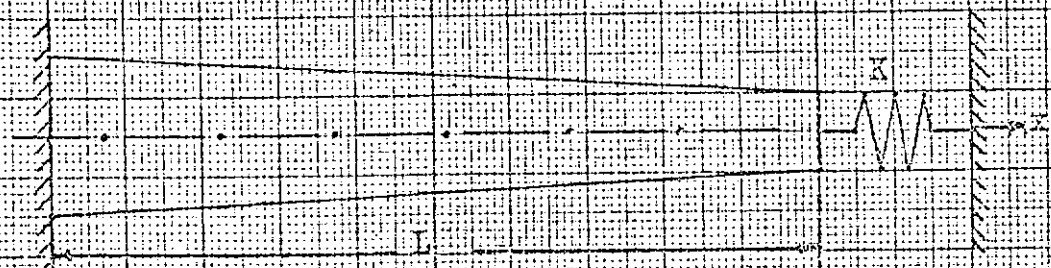
Introduzindo a igualdade 2-5-1 em 2-5-2 obtém-se:

$$\left[\operatorname{tg} \frac{b\lambda(1 - kL)}{k} - \operatorname{tg} \frac{b\lambda}{k} \right] \left[1 + \frac{K(1 - kL)}{E S_2 k} \right] = \frac{b\lambda(1 - kL)}{k} \left[1 + \operatorname{tg} \frac{b\lambda(1 - kL)}{k} \operatorname{tg} \frac{b\lambda}{k} \right] \quad 2-5-3$$

Fazendo $Z = b\lambda L$ e lembrando o valor de k e da tangente da diferença de ângulos, podemos transformar a igualdade anterior na seguinte equação de frequências:

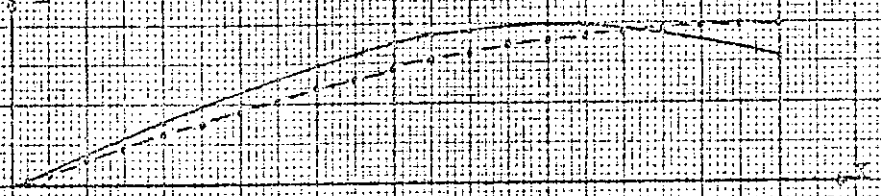
$$\operatorname{tg} Z \left(1 + \frac{K L}{E S_2} \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) + Z \frac{\alpha}{1 - \alpha} = 0 \quad 2-5-4$$

A equação 2-5-4 para o caso de $\alpha = 1$ satisfaz a equa

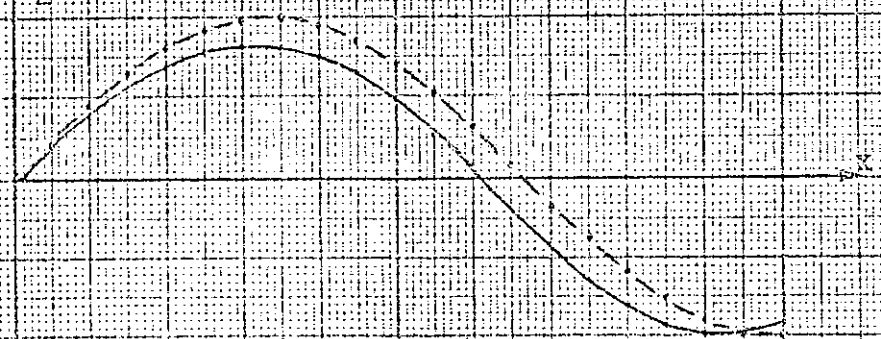


Barra bi-convexa com engaste e na outra extremidade uma mola

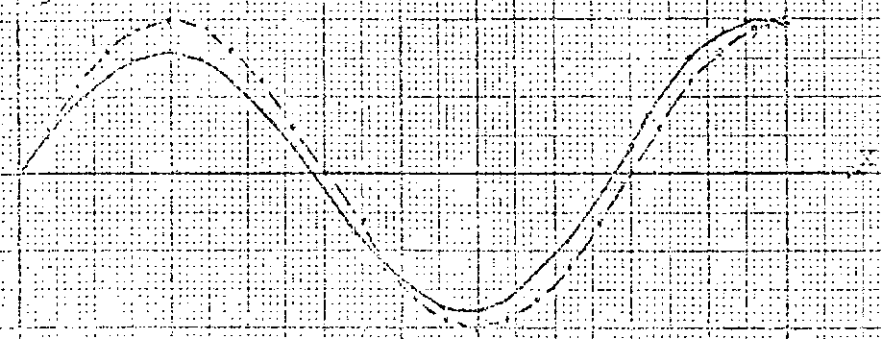
λ_1



1º Modo natural $\lambda_1 = \frac{2.1}{1} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$



2º Modo natural $\lambda_2 = \frac{4.2}{1} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$



3º Modo natural $\lambda_3 = \frac{6.2}{1} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

ção 1-6-1 e quando $K = 0$ tem-se satisfeita a igualdade 2-3-13.

Para a equação dos modos naturais de vibração, neste caso, pode ser tomada a 2-4-5. Como ilustração tomamos $\alpha = 0,75$ e $K L/E S_2 = 2$, obtendo os seguintes resultados:

$Z_1 = 2,35217$	$\lambda_1 = 12088,327 \text{ rd/s}$
$Z_2 = 5,13863$	$\lambda_2 = 26408,519 \text{ rd/s}$
$Z_3 = 8,13336$	$\lambda_3 = 44799,105 \text{ rd/s}$
$Z_4 = 11,20095$	$\lambda_4 = 57564,112 \text{ rd/s}$
$Z_5 = 14,41197$	$\lambda_5 = 73485,254 \text{ rd/s}$

A figura 2-4- nos mostra os três primeiros modos naturais de vibração comparados com os correspondentes da barra uniforme com uma secção engastada e a outra livre.

CAPÍTULO III

VIBRAÇÃO LONGITUDINAL DE BARRAS COM SECÇÃO VARIÁVEL

SÉRIE DE FOURIER

3-1. Instituição do sistema de equações.

O processo aqui estudado, além de nos permitir confrontar os resultados obtidos no capítulo anterior, torna possível obtermos as frequências e os modos naturais de vibração longitudinal de barras de secção variável que não apresentam solução analítica de forma convencional.

Como restrição, a solução somente é possível para os casos em que as funções de secção e massa por unidade de comprimento sejam desenvolvíveis numa série de Fourier.

Para esta análise consideramos uma barra de comprimento $2L$, secção qualquer, com as duas extremidades engastadas, que, como veremos posteriormente, nos permitirá analisar casos com outras condições de contorno.

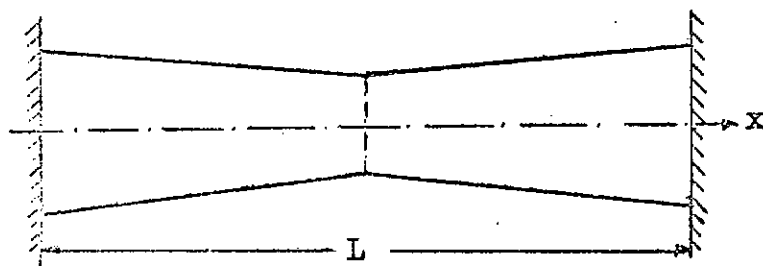


figura 3-1

Neste estudo consideramos ainda válidas as hipóteses simplificadoras citadas no item 1-1. Pode-se, então, supor que uma secção genérica da barra seja locada pela seguinte série de Fouri-

er:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \sin \frac{n \pi x}{2 L} \quad 3-1-1$$

Na equação 3-1-1, o somatório é considerado somente a partir de $n = 1$, por que analisaremos casos em que, pelo menos, uma das extremidades esteja engastada, não havendo então um deslocamento constante da secção genérica, ou seja, $U_0 = 0$.

Os valores de U_n são funções do tempo e que podemos considerar como coordenadas generalizadas.

Para as funções de secção e massa por unidade de comprimento pode-se supor as seguintes séries:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos \frac{n \pi x}{2 L} \quad 3-1-2$$

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho F_n \cos \frac{n \pi x}{2 L} \quad 3-1-3$$

onde ρ é a massa específica do material e F_n são os coeficientes da série da função de secção que poderão ser calculados para cada caso particular.

A instituição do sistema de equações que nos permite determinar as frequências e os modos naturais de vibração, terá a equação de Lagrange para sistemas elásticos conservativos por base, que é dada pela seguinte relação:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{U}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial U_n} = 0 \quad 3-1-4$$

Na equação 3-1-4, $L' = E_c - E_p$ é o Lagrangiano, sendo a diferença entre a energia cinética e potencial do sistema e U_n é a coordenada generalizada.

O primeiro passo a ser tomado será determinar a energia cinética e potencial da barra para uma determinada deformação longitudinal num instante t , que poderão ser expressas pelas seguintes equações:

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^L \rho F(x) \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 dx \quad 3-1-5$$

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^L E F(x) \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dx \quad 3-1-6$$

Introduzindo as derivadas parciais de 3-1-1 primeiro em relação ao tempo que representa a velocidade de uma secção genérica; depois em relação a x que é a deformação específica na mesma secção, nas equações 3-1-5 e 3-1-6, obtém-se:

$$E_c = \frac{\rho}{2} \int_0^L \left[\sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos \frac{n \pi x}{2L} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{U}_n \sin \frac{n \pi x}{2L} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{U}_n \sin \frac{n \pi x}{2L} \right] dx$$

$$E_p = \frac{E \pi^2}{8 L^2} \int_0^L \left[\sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos \frac{n \pi x}{2L} \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos \frac{n \pi x}{2L} \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos \frac{n \pi x}{2L} \right] dx$$

Se nas relações anteriores fizermos $z = \pi x / 2L$ pode-se transformá-las para as formas:

$$E_c = \frac{L \rho}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_i \dot{U}_m \dot{U}_n \cos i z \sin m z \sin n z \right] dz \quad 3-1-7$$

$$E_p = \frac{E \pi}{4 L} \int_0^{\pi} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m n F_i U_m U_n \cos i z \cos m z \cos n z \right] dz \quad 3-1-8$$

A integral das expressões 3-1-7 e 3-1-8 resume-se na integral dos seguintes valores:

$$A_{imn} = \frac{L}{\pi} \int_0^{\pi} \cos i z \sin m z \sin n z dz \quad 3-1-9$$

$$B_{imn} = \frac{L}{\pi} \int_0^{\pi} \cos i z \cos m z \cos n z dz \quad 3-1-10$$

Sabendo que,

$$\sin m z \sin n z = \frac{1}{2} [\cos(m - n) z - \cos(m + n) z]$$

$$\cos m z \cos n z = \frac{1}{2} [\cos(m - n) z + \cos(m + n) z]$$

e ao chamarmos $\alpha_{mn} = m - n$, $\beta_{mn} = m + n$, pode-se transformar as igualdades 3-1-9 e 3-1-10 nas seguintes:

$$A_{imn} = \frac{L}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos i z (\cos \alpha_{mn} z - \cos \beta_{mn} z) dz \quad 3-1-11$$

$$B_{imn} = \frac{L}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos i z (\cos \alpha_{mn} z + \cos \beta_{mn} z) dz \quad 3-1-12$$

Se chamarmos,

$$C_{imn} = \frac{L}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos i z \cos \alpha_{mn} z dz \quad 3-1-13$$

$$D_{imn} = \frac{L}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos i z \cos \beta_{mn} z dz \quad 3-1-14$$

pode-se escrever as equações 3-1-11 e 3-1-12 na forma:

$$A_{imn} = C_{imn} - D_{imn} \quad 3-1-15$$

$$B_{imn} = C_{imn} + D_{imn} \quad 3-1-16$$

Integrando as expressões 3-1-13 e 3-1-14 obtém-se:

$$C_{imn} = \frac{L}{4 \pi} \left[\frac{\text{sen}(\alpha_{mn} - i) z}{\alpha_{mn} - i} + \frac{\text{sen}(\alpha_{mn} + i) z}{\alpha_{mn} + i} \right]_0^{\pi} \quad 3-1-17$$

$$D_{imn} = \frac{L}{4 \pi} \left[\frac{\text{sen}(\beta_{mn} - i) z}{\beta_{mn} - i} + \frac{\text{sen}(\beta_{mn} + i) z}{\beta_{mn} + i} \right]_0^{\pi} \quad 3-1-18$$

A análise das igualdades anteriores nos dão os valores seguintes:

$$C_{imn} = 0 \text{ para } \alpha_{mn} \neq i$$

$$= L/2 \text{ para } \alpha_{mn} = i = 0$$

$$= L/4 \text{ para } \alpha_{mn} = \pm i$$

$$D_{imn} = 0 \text{ para } \beta_{mn} \neq i$$

$$= L/4 \text{ para } \beta_{mn} = + i$$

Levando os valores de C_{imn} e D_{imn} nas equações 3-1-7 e 3-1-8, observando que para $\alpha_{mn} = + i$ e $\alpha_{mn} = - i$ resulta o mesmo valor, tem-se, para energias, cinética e potencial total acumuladas na barra, as seguintes equações:

$$E_c = \frac{\rho L}{4} \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} F_0 \dot{U}_n^2 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_i \dot{U}_n \dot{U}_{i+n} - \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{i-1} F_i \dot{U}_n \dot{U}_{i-n} \right] \quad 3-1-19$$

$$E_p = \frac{E W}{16 L} \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_0 U_n^2 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (i+n) n F_i U_n U_{i+n} + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{i-1} (i-n) n F_i U_n U_{i-n} \right] \quad 3-1-20$$

Com os resultados obtidos nas equações 3-1-19 e 3-1-

20 obtém-se o seguinte Lagrangiano:

$$L' = \frac{\rho L}{4} \left\{ 2 \sum_{n=1}^{\infty} F_0 \left[\dot{U}_n^2 - \frac{E \pi^2}{4 \rho L^2} n^2 U_n^2 \right] + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_i \left[\dot{U}_n \dot{U}_{i+n} - \frac{E \pi^2}{4 \rho L^2} (i+n) n U_n U_{i+n} \right] - \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{i-1} F_i \left[\dot{U}_n \dot{U}_{i-n} + \frac{E \pi^2}{4 \rho L^2} (i-n) n U_n U_{i-n} \right] \right\}$$

3-1-21

Diferenciando o Lagrangiano, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L'}{\partial \dot{U}_n} \right] = \frac{\rho L}{4} \left[4 F_0 \ddot{U}_n + 2 \sum_{i=1}^{\infty} F_i \ddot{U}_{i+n} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} F_i \ddot{U}_{n-i} - 2 \sum_{i=n+1}^{\infty} F_i \ddot{U}_{i-n} \right]$$

$$\frac{\partial L'}{\partial U_n} = - \frac{\rho L}{4} \left[4 \frac{E \pi^2}{4 \rho L^2} n^2 F_0 U_n + 2 \sum_{i=1}^{\infty} F_i \frac{E \pi^2}{4 \rho L^2} (i+n) n U_{i+n} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} F_i \frac{E \pi^2}{4 \rho L^2} (n-i) n U_{n-i} + 2 \sum_{i=n+1}^{\infty} F_i \frac{E \pi^2}{4 \rho L^2} (i-n) n U_{i-n} \right]$$

Chamando de $C = E \pi^2 / 4 \rho L^2$ e substituindo as derivadas anteriores na equação 3-1-4 obtém-se a seguinte expressão:

$$2 F_0 \left[\ddot{U}_n + C n^2 U_n \right] + \sum_{i=1}^{\infty} F_i \left[\ddot{U}_{i+n} + C (i+n) n U_{i+n} \right] + \sum_{i=1}^{n-1} F_i \left[\ddot{U}_{n-i} + C (n-i) n U_{n-i} \right] - \sum_{i=n+1}^{\infty} F_i \left[\ddot{U}_{i-n} - C (i-n) n U_{i-n} \right] = 0$$

3-1-22

Supondo que U_n seja uma função harmônica, logo, $\ddot{U}_n = -\lambda^2 U_n$, em que λ é a frequência, e, só para efeito de escrita adota-se a convenção de que $U_{-n} = -U_n$, pode-se escrever a equação 3-1-22 da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^{\infty} F_i \left\{ \lambda^2 \left[U_{i+n} + U_{n-i} \right] - C n \left[(i+n) U_{i+n} + (n-i) U_{n-i} \right] \right\} +$$

$$2 F_0 [\lambda^2 - C n^2] U_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots, \infty) \quad 3-1-23$$

A equação 3-1-23 é um sistema infinito de equações algébricas e homogêneas, em que os coeficientes são função da frequência e das dimensões da barra.

Ao estabelecermos o sistema de equações a partir da expressão 3-1-23, precisaríamos ordená-lo, o que pode ser feito automaticamente com a seguinte notação:

$$\sum_{j=1}^{\infty} e_{nj} U_j = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots, \infty) \quad 3-1-24$$

Na equação 3-1-24 o valor de e_{nj} pode ser determinado a partir da expressão 3-1-23 e é dado por:

$$e_{nj} = [F_{|j-n|} - F_{n+j} + \delta_{nj} F_0] \lambda^2 - C n j [F_{|j-n|} + F_{n+j} + \delta_{nj} F_0] \quad 3-1-25$$

onde δ_{nj} é o delta de Kronecker.

A equação 3-1-24 como constatamos é um sistema de equações. A solução deste sistema consiste num problema de auto-valores e auto-vetores, que é possível, quando o determinante do sistema é nulo ou seja:

$$\Delta_{\infty} |e_{nj}| = 0 \quad 3-1-26$$

A partir da equação 3-1-26 pode-se determinar os auto-valores que são as frequências naturais de vibração longitudinal da barra e que levados na equação 3-1-24 nos dão os auto-vetores correspondentes.

Quando cada auto-vetor, assim calculado, é levado na

equação 3-1-1, obtém-se o modo natural de vibração da barra.

Para o caso em que a barra é uniforme, a equação 3-1-26 reduz-se na seguinte:

$$\lambda^2 = j^2 C = j^2 \frac{E \pi^2}{4 \rho L^2}$$

ou

$$\lambda_j = \frac{j \pi}{2 L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad 3-1-27$$

O mesmo resultado da equação 3-1-27 pode ser obtido com um desenvolvimento da forma do item 1-4, desde que naquele caso introduzimos um comprimento $2 L$ da barra bi-engastada.

A equação 3-1-26 satisfaz o caso da barra uniforme com uma extremidade engastada e a outra livre, de comprimento L , se considerarmos que a mesma somente é válida para j ímpar, obtendo a seguinte equação de frequências,

$$\lambda_j = \frac{j \pi}{2 L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (j = 1, 2, 3, \dots, \infty) \quad 3-1-28$$

que coincide com a equação de frequências obtida no item 1-2.

Com estas conclusões, para determinar as frequências e os modos naturais de vibração longitudinal de uma barra de secção variável com uma extremidade engastada, a outra livre de comprimento L , pode-se tomar por regra que a função de secção deve ser desenvolvida em série de Fourier para o caso de barra mostrada na figura 3-1 e a equação 3-1-24 deverá ser escrita na seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^{\infty} e_{n \ 2k+1} U_{2k+1} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, \infty) \quad 3-1-29$$

De uma forma geral pode-se determinar, numa primeira aproximação, a frequência fundamental da barra de secção variável pela seguinte relação:

$$\Delta_1 |e_{11}| = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_1^2 = c \left[\frac{2 F_0 + F_2}{2 F_0 - F_2} \right] \quad 3-1-30$$

Uma segunda aproximação da frequência fundamental pode ser obtida a partir do menor valor da equação $\Delta_2 |e_{nj}| = 0$ ou

$$\lambda_1^2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad 3-1-31$$

onde tem-se:

$$a = (2 F_0 - F_2)(2 F_0 - F_4) - (F_1 - F_3)^2$$

$$b = -4 C(2 F_0 - F_2)(2 F_0 + F_4) - C(2 F_0 + F_2)(2 F_0 - F_4) + 4 C(F_1 + F_3)(F_1 - F_3)$$

$$c = 4 C^2(2 F_0 + F_2)(2 F_0 + F_4) - 4 C^2(F_1 + F_3)^2$$

Para obtermos maiores aproximações bem como para determinarmos as frequências de ordem superior, existe viabilidade, somente com auxílio de métodos numéricos e resolvidos no computador.

3-2. Exemplo. Barra variável com uma extremidade engastada e a outra livre.

O exemplo proposto, além de confirmar os resultados obtidos no item 2-3, apresentará valores para casos em que não é possível a solução analítica, como já foi citado.

Na análise teórica deste capítulo foi constatado que, para determinar as frequências e os modos naturais de vibração de uma barra de secção variável, como a mostrada na figura 3-2, deveríamos utilizar o sistema de equações dado pela relação 3-1-29, e, para a série da função de secção, uma expansão tipo par do caso mostrado na figura 2-1.

Se chamarmos de a_1 e b_1 as maiores dimensões da secção retangular da barra, a_2 e b_2 as menores, $\alpha = a_2/a_1$ e $\beta = b_2/b_1$ as relações de dimensões, pode-se escrever para a função de secção as seguintes equações:

$$F(x) = \frac{S_1}{L^2} [L - x(1 - \alpha)] [L - x(1 - \beta)] \quad 0 \leq x \leq L \quad 3-2-1$$

$$F(x) = \frac{S_1}{L^2} [L(2\alpha - 1) + x(1 - \alpha)] [L(2\beta - 1) + x(1 - \beta)] \quad L \leq x \leq 2L \quad 3-2-2$$

Introduzindo as funções 3-2-1 e 3-2-2 na relação

$$F_n = \frac{2}{L_0} \int_0^{L_0} F(x) \cos \frac{n\pi x}{L_0} dx \quad 3-2-3$$

onde L_0 é o intervalo ou período da função, obtém-se os seguintes coeficientes da série de Fourier da função de secção:

$$F_0 = \frac{S_1}{6} [2(\alpha\beta + 1) + (\alpha + \beta)] \quad 3-2-4$$

$$F_m = \frac{4 S_1}{\pi^2 m^2} \left[1 - \frac{(\alpha + \beta)}{2} [1 - (-1)^{m+1}] - (-1)^{m+1} \alpha \beta \right] \quad (m = 1, 2, \dots, \infty) \quad 3-2-5$$

Com os valores obtidos em 3-2-4 e 3-2-5 a função de

secção da barra é a seguinte:

$$F(x) = S_1 \left\{ \frac{2(\alpha\beta + 1) + (\alpha + \beta)}{6} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left[1 - \frac{(\alpha + \beta)}{2} [1 - (-1)^{m+1}] - (-1)^{m+1} \alpha\beta \right] \cos \frac{m\pi x}{L} \right\} \quad 3-2-6$$

Segundo os resultados obtidos neste exemplo, verifica-se que para determinar as três primeiras frequências naturais de vibração, podemos calculá-las a partir de um sistema de terceira ordem que é o seguinte:

$$\begin{aligned} [(2F_0 - F_2)X - (2F_0 + F_2)]U_1 + [(F_2 - F_4)X - 3(F_2 + F_4)]U_3 + [(F_4 - F_6)X - 5(F_4 + F_6)]U_5 &= 0 \\ [(F_2 - F_4)X - 3(F_2 + F_4)]U_1 + [(2F_6 - F_6)X - 9(2F_0 + F_6)]U_3 + [(F_2 - F_8)X - 15(F_2 + F_8)]U_5 &= 0 \\ [(F_4 - F_6)X - 5(F_4 + F_6)]U_1 + [(F_2 - F_8)X - 15(F_2 + F_8)]U_3 + [(2F_0 - F_{10})X - 25(2F_0 + F_{10})]U_5 &= 0 \end{aligned}$$

onde tem-se $X = \lambda^2/c$.

No programa 3 está indicado a sequência de cálculo dos valores de $Z_{ij} = b \lambda L$, onde o primeiro índice de Z representa a ordem da frequência e o segundo a ordem do sistema de equações ou aproximação de cálculo. Estes valores estão mostrados na tabela 6, onde, pode-se constatar uma rápida convergência nas três aproximações da frequência fundamental, bem como ótimos resultados da segunda e terceira frequência, uma vez comparados com os valores da tabela 5.

Na tabela 6, determinados valores de Z onde $\alpha = \beta$, são um pouco superiores aos correspondentes da tabela 5, o que já era esperado, supondo que os últimos são exatos com as hipóteses

simplificadoras, com base no enunciado do teorema da mínima energia de deformação.

Para determinar os modos naturais de vibração basta que introduzamos um valor de X calculado, no sistema de equações 3-1-29 e calcular os valores correspondentes de U . Estes valores de U devem ser calculados a partir de um sistema de ordem superior a 3, para obtermos uma razoável precisão.

Na figura 3-2, tem-se os gráficos dos três primeiros modos naturais de vibração, onde, $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,8$, $L = 100\text{cm}$, para os quais foram calculados os cinco primeiros valores de U a partir de um sistema de quinta ordem pelo programa 4, e as ordenadas pelo programa 5.

No programa 4 chamamos a sub-rotina EIGEN que consiste no método de JACOBI para determinação dos auto-valores e auto-vetores de uma matriz simétrica e real.

Por este método resulta uma matriz de 5×5 onde uma das colunas representa um auto-vetor e que de acordo com o programa 4 será escrita em forma transposta.

Pode-se demonstrar que as componentes do auto-vetor os coeficientes U_n da série 3-1-1 do primeiro modo natural serão os valores da primeira linha, quando substituirmos o primeiro valor de X no sistema de quinta ordem. As componentes do auto-vetor do segundo modo natural de vibração serão os valores da segunda linha quando substituirmos o valor de X correspondente e assim por diante para os demais modos.

Os valores das componentes do auto-vetor correspondente ao modo natural estão mostrados no programa 5 como dados a

TABELA 6

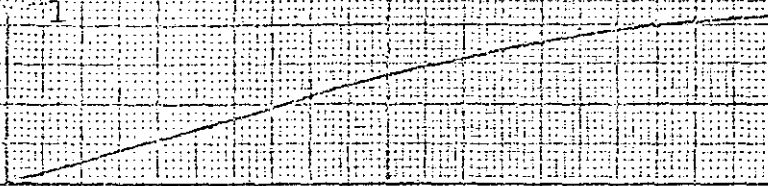
$\alpha = 0,5$						
β	Z_{11}	Z_{12}	Z_{13}	Z_{22}	Z_{23}	Z_{33}
0,5	2,05088	2,02938	2,02926	4,94995	4,91434	8,02246
0,6	1,98535	1,96817	1,96804	4,90936	4,88126	7,99185
0,7	1,92912	1,91574	1,91562	4,87732	4,85551	7,96800
0,8	1,88029	1,87013	1,87003	4,85130	4,83465	7,94888
0,9	1,83743	1,82996	1,82987	4,82971	4,81724	7,93321
1,0	1,79949	1,79419	1,79413	4,81147	4,80234	7,92015
$\alpha = 0,6$						
β	Z_{11}	Z_{12}	Z_{13}	Z_{22}	Z_{23}	Z_{33}
0,5	1,98535	1,96817	1,96804	4,90936	4,88126	7,99185
0,6	1,92083	1,90752	1,90739	4,87104	4,84967	7,96339
0,7	1,86562	1,85565	1,85553	4,84105	4,82518	7,94147
0,8	1,81779	1,81058	1,81048	4,81690	4,80543	7,92408
0,9	1,77590	1,77092	1,77084	4,79700	4,78697	7,90999
1,0	1,73889	1,73564	1,73559	4,78031	4,77492	7,89835
$\alpha = 0,7$						
β	Z_{11}	Z_{12}	Z_{13}	Z_{22}	Z_{23}	Z_{33}
0,5	1,92912	1,91574	1,91562	4,87732	4,85551	7,96800
0,6	1,86562	1,85565	1,85553	4,84105	4,82518	7,94147
0,7	1,81142	1,80430	1,80420	4,81292	4,80177	7,92128
0,8	1,76455	1,75974	1,75965	4,79046	4,78296	7,90545
0,9	1,72355	1,72055	1,72049	4,77211	4,76734	7,89275
1,0	1,68746	1,68572	1,68569	4,75683	4,75404	7,88240

TABELA 6
(continuação)

$\alpha = 0,8$						
β	z_{11}	z_{12}	z_{13}	z_{22}	z_{23}	z_{33}
0,5	1,88029	1,87013	1,87003	4,85130	4,83465	7,94888
0,6	1,81779	1,81058	1,81048	4,81690	4,80542	7,92408
0,7	1,76455	1,75974	1,75965	4,79046	4,78296	7,90545
0,8	1,71861	1,71564	1,71557	4,76955	4,76497	7,89102
0,9	1,67852	1,67689	1,67685	4,75260	4,75010	7,87959
1,0	1,64319	1,64246	1,64245	4,73860	4,73747	7,87040
$\alpha = 0,9$						
β	z_{11}	z_{12}	z_{13}	z_{22}	z_{23}	z_{33}
0,5	1,83743	1,82996	1,82987	4,82971	4,81724	7,93321
0,6	1,77590	1,77092	1,77084	4,79700	4,78897	7,90999
0,7	1,72359	1,72055	1,72049	4,77211	4,76734	7,89275
0,8	1,67852	1,67689	1,67685	4,75260	4,75010	7,87959
0,9	1,63923	1,63854	1,63852	4,73694	4,73589	7,86932
1,0	1,60466	1,60449	1,60449	4,72412	4,72386	7,86117
$\alpha = 1,0$						
β	z_{11}	z_{12}	z_{13}	z_{22}	z_{23}	z_{33}
0,5	1,79949	1,79419	1,79413	4,81147	4,80234	7,92015
0,6	1,73889	1,73564	1,73559	4,78031	4,77492	7,89835
0,7	1,68746	1,68572	1,68565	4,75683	4,75404	7,88240
0,8	1,64319	1,64246	1,64245	4,73860	4,73747	7,87040
0,9	1,60466	1,60449	1,60449	4,72412	4,72386	7,86117
1,0	1,57079	1,57079	1,57079	4,71238	4,71238	7,85397

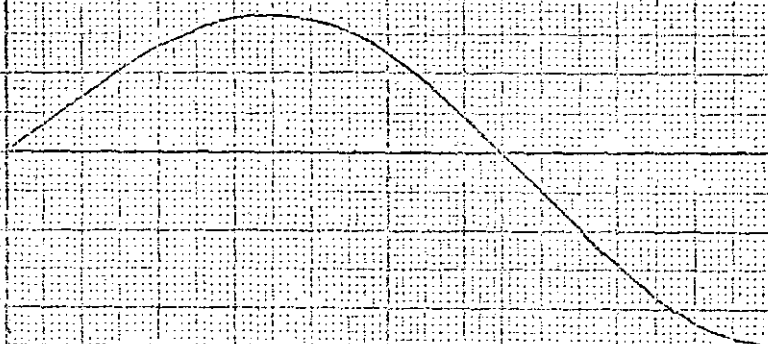
Barras variáveis com relações de dimensões $\alpha = 0,5$ e $\beta = 0,8$

λ_1



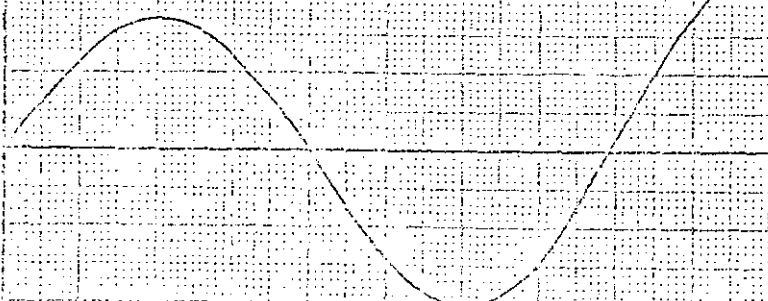
1º Modo natural $\lambda_{13} = 1,57003$

λ_2



2º Modo natural $\lambda_{23} = 4,85465$

λ_3



3º Modo natural $\lambda_{33} = 7,94838$

1-3-2

serem lidos para a computação das coordenadas dos três gráficos da figura 3-2.

Comparando os gráficos das figuras 3-2 com os da figura 2-2, constata-se os bons resultados obtidos por este método de análise para determinação das frequências e modos naturais de vibração das barras de secção variável.

Cabe-nos, ainda, uma observação muito importante que é a validade do estudo neste trabalho para as vibrações torcionais de barras de secção variável e uniforme. Se substituirmos determinados parâmetros da análise de vibração longitudinal de barras pelos equivalentes da vibração torcional tem-se, praticamente, todo o trabalho mais uma vez válido.

PROGRAMA 1

// JOB T

// FOR

*EXTENDED PRECISION

*LIST SOURCE PROGRAM

*ICCS(CARD,1132 PRINTER)

C CALCULO DAS FREQUENCIAS DE VIBRACAO LONGITUDINAL

C DA BARRA ENCASTADA-MOLA

C METODO DE NEWTON-RAPHSON

DIMENSION DELT(200),Z(200),F(200),DF(200)

TOL=0.00001

ALFA=0.001

N=0

20 ALFA=ALFA*2.0

K=N+1

WRITE(3,30)ALFA

30 FORMAT(F10.4)

ZE=1.0

FE=ALFA*SEN(ZE)+LE*XCOS(ZE)

IF(ABS(FE)-TOL)40,40,50

40 WRITE(3,60)ZE,FE

60 FORMAT(2E20.10)

50 ZD=ZE+0.1

I=1

DELT(2)=0.1

FD=ALFA*SEN(ZD)+LE*XCOS(ZD)

IF(ABS(FD)-TOL)70,70,80

```

70 WRITE(3,90)ZD,FD
90 FORMAT(2E20.10)
80 IF(FD*FE)100,100,110
110 ZE=ZD
    FE=ALFA*SIN(ZE)+ZE*COS(ZE)
    GO TO 50
100 Z(2)=ZE
105 I=I+1
    F(I)=ALFA*SIN(Z(I))+Z(I)*COS(Z(I))
    DF(I)=(ALFA+1.)*COS(Z(I))-Z(I)*SIN(Z(I))
    Z(I+1)=Z(I)-F(I)/DF(I)
    F(I+1)=ALFA*SIN(Z(I+1))+Z(I+1)*COS(Z(I+1))
    DELT(I+1)=ABS(Z(I+1)-Z(I))
    IF(ABS(F(I+1))-TOL)120,120,130
120 IF(DELT(I+1)-TOL)140,140,130
140 WRITE(3,150)I,Z(I+1),F(I+1),DELT(I+1)
150 FORMAT(1X,I4,3E20.10)
    ZE=ZD
    FE=ALFA*SIN(ZE)+ZE*COS(ZE)
    GO TO 50
130 IF(I-200)160,170,170
160 IF(Z(I+1)-17.)180,180,190
180 Z(I)=Z(I+1)
    GO TO 105
170 WRITE(3,200)Z(I+1),F(I+1),DELT(I+1)
200 FORMAT(5X,3E20.10)
    ZE=ZD

```


FE=ALFA*SIN(ZE)+ZE*COS(ZE)

GO TO 50

190 IF(N-15)210,210,220

210 GO TO 20

220 CALL EXIT

END

PROGRAMA 2

```

// JOB T
// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
C SUB-PROGRAMA PARA ARMAZENAGEM DA FUNCAO FUNCO
      FUNCTION FUNCO(X)
      COMMON ALPHA
      FUNCO=(X)+SIN(X)-ALFA+COS(X)
      RETURN
      END

// DUP
*STORE      WS  VA  FUNCO
// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
*IOOS(CARD,1132 PRINTER)
C PROGRAMA PRINCIPAL
C CALCULO DAS FREQUENCIAS DE VIBRACAO LONGITUDINAL DA
C BARRA DE SUSCAO UNIFORME COM UMA EXTREMIDADE
C ENCRUSTADA E NA OUTRA UMA MASSA
      EXTERNAL XONO
      COMMON ALFA
      IIS=0.00001
      FREQ=1000
      ALFA=0.005

```

```
N=0
STEP=0.1
10 ALFA=ALFA*2
N=N+1
WRITE(3,20)ALFA
20 FORMAT(F8.2)
XL=0.0
25 XR=XL+STEP
XE=XR
CALL RTMIT(X,FUNC,XL,XR,EPS,ITEND,IER)
IER=IER+1
GO TO (30,40,50),IER
30 Y=FUNC(X)
WRITE(3,60)X,Y
60 FORMAT(2E20.10)
XL=XE
IF(XL-15.)25,70,70
70 IF(N-15)10,80,80
40 XL=XE
IF(XL-15.)25,90,90
90 IF(N-15)10,80,80
50 WRITE(3,100)
100 FORMAT(5X,'NAO HOUVE CONVERGENCIA')
XL=XE
GO TO 25
80 CALL EXIT
END
```

LISTAGEM DA SUB-ROTINA RTMIT

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM

*EXTENDED PRECISION

*ONE WORD INTEGERS

SUBROUTINE RTMIT(X,FUNCT,XL,XR,EPS,ITEND,IER)

C PREPARATION OF FIRST ITERATION STEP

IER=0

X=XL

FL=FUNCT(X)

IF(FL)1,91,1

1 X=XR

FR=FUNCT(X)

IF(FR)2,91,2

2 IF(FL*FR)6,3,3

3 IER=1

X=.5*(XL+X)

RETURN

C BASIC ASSUMPTION FL*FR.LT.0 IS FULLFILLED. START ITERATION.

6 IT=ITEND+1

DO 90 K=1,IT

C BISECTION-LOOP

DO 19 K=1,ITEND

X=.5*(XL+XR)

F=FUNCT(X)

IF(F)7,91,7

7 IF(F*FR)8,13,13

8 DX=XL

XL=XR

XR=DX

DX=FL

FL=FR

FR=DX

13 IF(ABS(F)-ABS(FR))14,16,16

14 IF(R-IT)31,16,16

16 XR=X

FR=F

C END OF PROCEDURE IS TESTED

DX=ABS(XR-XL)

ABSXR=ABS(XR)

IF(ABSXR-1.)18,18,17

17 DX=DX/ABSXR

18 IF(DX-EPS)21,21,19

19 CONTINUE

IPR=2

21 I=IPR

IF(ABS(FL)-ABS(FR))91,91,22

22 X=XR

RETURN

C COMPUTATION OF A NEW X-VALUE

31 DFL=F-FL

DFR=FR-F

DX=(X-XL)*FL*(1.+P*(DFR-DFR)/(DFR*(FR-FL)))/DFL

XM=X

FM=F

X=XL-DX

DX=ABS(X)

ABSX=ABS(X)

IF(ABSX-1.)33,33,32

32 DX=DX/ABSX

33 IF(DX-EPS)91,91,34

C PREPARATION OF NEXT BISECTION-LOOP

34 F=FUNCT(X)

IF(F)35,91,35

35 IF(F+FL)36,36,37

36 XR=X

FR=F

GO TO 90

37 XL=X

FL=F

XR=XM

FR=FM

90 CONTINUE

91 RETURN

END

PROGRAMA 3

// JOB T

// FOR

*EXTENDED PRECISION

*LIST SOURCE PROGRAM

FUNCTION BK(X)

COMMON A,B,SI,RP,TO,P1,P2,P3,P4,P7,P8

 $P5 = (1./4.) * RP - (1./9.) * SI$ $P6 = (1./4.) * RP + (1./9.) * SI$ $P9 = SI - (1./16.) * RP$ $P10 = SI + (1./16.) * RP$ $P11 = TO - (1./25.) * SI$ $P12 = TO + (1./25.) * SI$ $BK = (P1 * X - P2) * (P7 * X - 9. * P8) * (P11 * X - 25. * P12) + 2. * (P5 * X - 5. * P6) * (P3$ $1 * X - 3. * P4) * (P9 * X - 15. * P10) - ((P5 * X - 5. * P6) ** 2) * (P7 * X - 9. * P8) - ((P3$ $2 * X - 3. * P4) ** 2) * (P11 * X - 25. * P12) - ((P9 * X - 15. * P10) ** 2) * (P1 * X - P2)$

RETURN

END

// BUP

*STORE WS UA BK

// FOR

*EXTENDED PRECISION

*LIST SOURCE PROGRAM

*ICCS(CARD,1132 PRINTER)

C PROGRAMA PRINCIPAL

C CALCULO DAS FREQUENCIAS FUNDAMENTAIS DA BARRA DE SECCAO VARIAVEL

```

EXTERNAL BK
COMMON A,B,SI,RP,TO,P1,P2,P3,P4,P7,P8
EPS=0.00001
ITERND=1000
A=0.4
10 A=A+0.1
   B=0.4
   WRITE(3,20)A
20  FORMAT(20X,'A=',F7.4)
30  B=B+0.1
   WRITE(3,40)B
40  FORMAT(10X,'B=',F7.4)
   SI=1.-A*B
   RP=1-A-B+A*B
   PIQ=9.8696
   TO=((2.*(A*B+1.)+A+B)/12.)*PIQ
   P1=TO-SI
   P2=TO+SI
   P3=SI-(1./4.)*RP
   P4=SI+(1./4.)*RP
   P7=TO-(1./9.)*SI
   P8=TO+(1./9.)*SI
   Z11=SQR((P2/P1)*(PIQ/4.))
   WRITE(3,50)Z11
50  FORMAT(3X,'Z11=',F10.5)
   PIC=P1*P7-(P3)**2
   P30=-(9.*P1*P8+P2*P7-6.*P3*P4)

```



```

P40=9.*(P2*P8-(P4)**2)
Z12=SQRT((-P30-SQRT((P30)**2-4.*P20*P40))/(2.*P20)*(PIQ/4.))
Z22=SQRT((-P30+SQRT((P30)**2-4.*P20*P40))/(2.*P20)*(PIQ/4.))
WRITE(3,60)Z12,Z22
60 FORMAT(3X,'Z12=',F10.5,10X,'Z22=',F10.5)
XL=0.0
70 XR=XL+0.1
XE=XR
CALL RTMIT(X,BK,XL,XR,EPS,ITEND,IER)
IER=IER+1
GO TO(80,90,100),IER
80 ZN3=SQRT(X*PIQ/4.)
WRITE(3,110)ZN3
110 FORMAT(15X,'ZN3=',F10.5)
XL=XE
IF(XL-30.)70,70,120
120 IF(B-1.)30,130,130
130 IF(A-1.)10,140,140
90 XL=XE
IF(XL-30.)70,70,150
150 IF(B-1.)30,160,160
160 IF(A-1.)10,140,140
100 WRITE(3,170)
170 FORMAT(5X,'NAO HOUVE CONVERGENCIA')
XL=XE
IF(XL-30.)70,70,180
180 IF(B-1.)30,190,190

```

190 IF(A-1.)10,140,140

140 CALL EXIT

END

// IEQ

PROGRAMA 4

// JOB T

// FOR

+EXTENDED PRECISION

+LIST SOURCE PROGRAM

+IOCS(CARD,1132 PRINTER)

C CALCULO DOS AUTO-VETORES

DIMENSION A(15),B(15),C(15),R(25)

X1=1.3570

READ(2,10)B,C

10 FORMAT(8F10.5)

DO 20 N=1,15

20 A(N)=B(N)*X1-C(N)

CALL EIGEN(A,R,5,0)

WRITE(3,30)R

30 FORMAT(5X,5F12.5)

CALL EXIT

END

// RES

2.77211	0.57500	3.30544	-0.04167	0.59375	3.34811
				0.06042	0.00100
0.59722	3.35986	-0.01775	0.06389	0.01275	0.59844
				3.36470	3.97211
1.87500	30.94902	0.20935	9.09375	84.90275	0.51044
				1.02900	21.09730
165.03364	0.27250	1.87515	1.67250	37.89828	273.74112

PROGRAMA 5

// JOE T

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM

*ICCB(CARD,1132 PRINTER)

C CALCULO DOS MODOS NATURAIS DE VIBRACAO

DIMENSION U(5)

N=0

PI=3.1415927

10 N=N+1

READ(2,20)U

20 FORMAT(5F10.6)

I=0

30 I=I+1

X=(I-1)*5.

$$VM=U(1)*\sin(\pi*X/200.)+U(2)*\sin(3.*\pi*X/200.)+U(3)*\sin(5.*\pi*X/200.)+U(4)*\sin(7.*\pi*X/200.)+U(5)*\sin(9.*\pi*X/200.)$$

WRITE(3,40)X,VM

40 FORMAT(5X,F6.1,F10.3)

IF(I-21)30,50,50

50 IF(I-3)10,60,60

60 CALL EXIT

END

// AM

1.00000	-0.04199	0.00168	-0.00243	-0.00043
-0.15012	0.98523	-0.06274	0.00077	-0.00458
0.04303	-0.12204	0.98897	-0.07195	0.00160

NOMENCLATURA

x	coordenada de uma secção genérica da barra;
t	variável tempo;
U	deslocamento de uma secção genérica;
E	módulo de elasticidade longitudinal do material;
L	comprimento da barra;
$f(x)$	função de secção;
$g(x)$	função de massa por unidade de comprimento;
F	fôrça que atua numa secção genérica;
E_c	energia cinética;
E_p	energia potencial;
M	massa;
S	secção constante;
a	constante adimensional;
X	função da variável x ;
T	função da variável t ;
λ	frequência de vibração em rd/seg;
m	massa por unidade de comprimento;
K	constante de mola;
d	diâmetro;
D	diâmetro;
G	módulo de elasticidade transversal;
ρ	peso específico;
g	aceleração da gravidade;
α	constante adimensional, relação de grandezas;
β	constante adimensional, relação de grandezas;

Z	valor adimensional, do qual determina-se a frequência;
ρ	massa específica;
b	constante adimensional;
J_r	função de Bessel de primeira espécie;
Y_r	função de Bessel de segunda espécie;
r	raio;
U_n	coeficiente da série de Fourier da função de deslocamento;
L	Lagrangiano;
$F(x)$	função de secção;
$G(x)$	função de massa por unidade de comprimento;
F_n	coeficientes da série de Fourier da função de secção;
α_{mn}	$n - n$
β_{mn}	$n + n$
C	constante adimensional;
a_{nj}	coeficientes do sistema de equações;
δ_{nj}	delta de Kronecker.

REFERÊNCIAS

1. Leonard Meirovitch, Analytical Methods in Vibrations, The Macmillan Company, 1967.
2. William T. Thomson, Vibration Theory and Applications, Prentice Hall, 1965.
3. S. Timoshenko, Vibrations Problems in Engineering, Van Nostrand 1955.
4. Journal of the Engineering Mechanics Division, vol. 93 NO. EM2. APR. 1967.
5. Francis B. Hildebrand, Advanced Calculus for Engineering, Prentice Hall, 1962.
6. Carl - Erich Fröberg, Introduction to Numerical Analysis, Addison-Wesley, 1965.
7. Thomas Richard McCalla, Introduction to Numerical Methods and FORTRAN Programming, Wiley, 1967.
8. A. S. Chino, Subroutine REMIT, em 1130 Scientific subroutine package(1130-CHNOH), Programmer's manual, IBM application program, 116.